e-pública
Revista electrónica sobre la enseñanza de la Economía Pública

Nº 8, febrero, 2011
Págs. 1 – 39

Sobre la medición de la desigualdad. El efecto redistributivo del impuesto lineal

Elena Bárcena Martín barcenae@uma.es

Departamento de Estadística y Econometría, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Málaga. Calle El Ejido, 6, 29071 Málaga, España.

Recibido: 26 de abril de 2010
Aceptado: 11 de octubre de 2010

Resumen

La desigualdad en la distribución de la renta es una cuestión a la que se presta cada vez más atención, debido posiblemente a que tanto políticos como investigadores y académicos reconocen los vínculos entre desigualdad y otros fenómenos socioeconómicos. En este artículo se presenta de forma sencilla el concepto de desigualdad y cómo evaluarla. Con esta finalidad se introduce la curva de Lorenz, la relación de dominancia entre este tipo de curvas y la ordenación parcial que dicha relación induce en el conjunto de distribuciones de renta. También se hace referencia a índices de desigualdad que son de uso habitual en la literatura aplicada. En la segunda parte del trabajo, como ejemplo del efecto redistributivo de una medida de política fiscal, estudiamos la incidencia sobre la desigualdad de un impuesto lineal. Los principales resultados se ilustran a través de la proposición de unos ejercicios que se pueden resolver bien manualmente, o bien empleando el programa estadístico STATA.

Palabras clave: análisis de la desigualdad, curva de Lorenz, impuesto lineal, enseñanza de la economía.

Códigos JEL: D30, D63, A2

1. INTRODUCCIÓN

Siempre ha existido interés por analizar la desigualdad, es decir, por el estudio de la forma en que se distribuye una cierta cantidad de una variable entre un conjunto finito de unidades. Si el interés se centra en la posición económica de los individuos, la variable a repartir puede ser la renta, la riqueza, el gasto, los salarios, la carga fiscal, etc. En este trabajo nos centraremos en la renta. En principio, la cuestión parece sencilla si nos limitamos a observar el valor numérico que la variable renta toma en cada elemento de la población. Kuznets (1953) comparte esta postura al afirmar: "Cuando hablamos de desigualdad de renta, simplemente nos referimos a diferencias de rentas, sin tener en cuenta su deseabilidad como sistema de recompensas o su indeseabilidad como sistema que contradice cierto esquema de igualdad".

Sin embargo, en la literatura económica al hablar de desigualdad no es habitual limitarse al enfoque anterior, prescindiendo de los aspectos normativos. Amartya Sen (1973) argumenta: "La idea de desigualdad es muy simple y muy compleja a la vez. Por una parte, es la más simple de todas las ideas y ha motivado a la gente con un atractivo inmediato difícilmente comparable con ningún otro concepto. Por otra parte, es una noción extraordinariamente compleja que hace las aseveraciones sobre desigualdad altamente problemáticas y ha sido, por tanto, objeto de amplia investigación por parte de filósofos, estadísticos, teóricos de la política, sociólogos y economistas".

Si hasta hace cuarenta años los economistas interesados en la desigualdad sólo intentaban responder a preguntas concretas (por ejemplo, ¿el sistema impositivo favorece la redistribución de la renta?), el enfoque moderno del análisis y la medición de la desigualdad, a partir de los trabajos pioneros de Kolm (1968, 1976a, 1976b), Atkinson (1970), Sen (1973, 1992), Jakobsson (1976) y Kakwani (1977), hacen que esta cuestión deje de ser un mero ejercicio estadístico de aplicación de un índice arbitrario de dispersión de rentas (como la varianza, el índice de Gini, etc.), y pase a convertirse en un campo de la teoría económica, con entidad propia, que se enmarca en la economía del bienestar[1].

A menudo la desigualdad contiene connotaciones negativas, ya que tal y como señala Atkinson (1975) "existe la presunción de que la igualdad es deseable". Reforzando esta idea Dagum (1993) argumenta que existe un principio socio económico básico, el principio de aversión social hacia la desigualdad, es decir, "preferencia social por una menor desigualdad con respecto a la observada". No obstante, Dagum (1993) advierte que "… la perfecta igualdad en la distribución de la renta no es ni una meta de las sociedades políticamente organizadas, ni una condición requerida para maximizar el bienestar social". Por lo tanto, una medida de desigualdad no valora lo adecuado que es el reparto, sino cuán cerca o lejos se encuentra de la igualdad, entendiendo por tal la situación en la que todos los individuos de la población perciben idéntica renta. Por su parte Kolm (1976a) señala "… las distintas medidas de desigualdad producen resultados ampliamente divergentes y puede que incluso opuestos. (…) Así, uno puede tomar como referencia cualquier país y probar que a lo largo de un período de tiempo la desigualdad ha aumentado o disminuido (…) escogiendo medidas de desigualdad diferentes que, a primera vista, parecerían igualmente buenas y valiosas".

En definitiva, no faltan los problemas conceptuales al analizar la desigualdad. La consideración de sus distintas facetas y su medición depende de puntos de vista subjetivos y de juicios de valor. Las discrepancias no sólo se manifiestan entre los economistas, como han puesto de manifiesto distintas investigaciones basadas en cuestionarios (Amiel y Cowell (1992 y 1999) y Ballano y Ruiz-Castillo (1993)) que analizan lo que la gente entiende por desigualdad.

Este trabajo pretende explicar de forma sencilla, para aquellos que se acercan por primera vez a la medición de la desigualdad, en qué consiste el fenómeno, cómo evaluarlo y el interés que puede tener dicha evaluación. Analizamos la desigualdad en la variable renta, ya que parece el indicador más adecuado para medir el nivel de vida de un individuo (u otra unidad económica considerada: familia, hogar,…) y su capacidad para adquirir y poseer bienes. Estudiamos los instrumentos que se utilizan para realizar comparaciones de desigualdad. En primer lugar se consideran las comparaciones ordinales, basadas en principios generales sobre los que puede existir un cierto consenso. Estos criterios no nos permiten realizar comparaciones entre cualquier par de distribuciones y tampoco cuantificar las diferencias en niveles de desigualdad. Por ello, en segundo lugar presentamos los índices más habituales y sus propiedades. El coste que se paga para hacer comparaciones cardinales es que éstas requieren un mayor grado de consenso sobre la noción de justicia distributiva ya que cada medida incorpora criterios distributivos diferentes. Por otra parte, la aparición en las economías actuales de un sector público muy desarrollado entre cuyos objetivos se encuentra el distributivo, estimula el desarrollo de la medición de la desigualdad ante la intervención de

Nº 8, febrero, 2011
Págs. 1 – 39

dicho sector. Como ejemplo del efecto redistributivo que puede tener una medida de política fiscal, estudiamos la incidencia, sobre la desigualdad, de un impuesto lineal[2].Este trabajo es una primera aproximación en la que prescindimos de forma deliberada de los aspectos normativos y aunque, en ocasiones, se hace referencia a los juicios de valor, no se establece la relación entre medidas de desigualdad y funciones de bienestar social.

Este artículo se organiza como sigue: tras esta introducción, el segundo epígrafe se dedica a los instrumentos empleados para establecer comparaciones de desigualdad, tanto ordinales como cardinales. En el tercer epígrafe analizamos el efecto de un impuesto lineal sobre la desigualdad de la distribución de la renta. En el último epígrafe se solucionan y comentan los ejercicios propuestos.

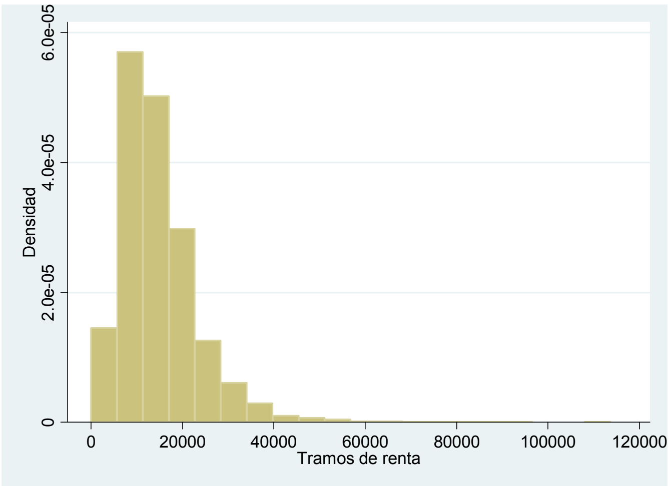
2. LA DESIGUALDAD DE LA RENTA

Supongamos que nuestro interés se centra en la posición económica de las personas. Como se tata de una cuestión difícil en la que inciden diversas circunstancias, vamos a simplificar el estudio suponiendo que la renta, como hemos indicado en la introducción, es el indicador adecuado para medir la capacidad de los individuos para poseer o adquirir bienes (Atkinson, 1970; Chakravarty and Muliere, 2003). Supondremos, además, que los individuos son idénticos en todas sus características relevantes distintas a su nivel de renta; es decir, constituyen una población homogénea.

Las dos características en las que podemos estar más interesados al estudiar la variable renta sobre una población son la renta media y la desigualdad. Esto es, cómo de grande es el pastel y la forma en que se reparte entre los individuos de esa población. Para valorar este último aspecto, en el que nos centramos en este trabajo, se recurre a la medición de la igualdad o de la desigualdad.

Es frecuente comenzar el estudio de la desigualdad en una distribución con un análisis gráfico que permita examinar visualmente el reparto de la renta entre los individuos de la población. Se puede considerar inicialmente la gráfica de la distribución empírica de frecuencias o histograma. Esta gráfica se construye ordenando a la población según sus rentas de menor a mayor. Ese rango de rentas se divide en un cierto número de intervalos. Estos intervalos de rentas se representan en el eje de las ordenadas, mientras que en el eje de las abscisas se representan sus frecuencias relativas o alturas. El histograma refleja entonces la distribución de la renta como una serie de rectángulos con una base que equivale al intervalo de rentas y una altura tal que el área de cada rectángulo es su frecuencia relativa. En la figura 1 se representa el histograma de la renta española cuando consideramos 10 intervalos de renta a partir de los datos de la Encuesta de Condiciones de Vida (ECV) para la ola del año 2008, que contiene información sobre la renta disponible equivalente[3] de 2007.

Figura 1. Distribución de la renta disponible en España, 2007. Histograma con 10 intervalos



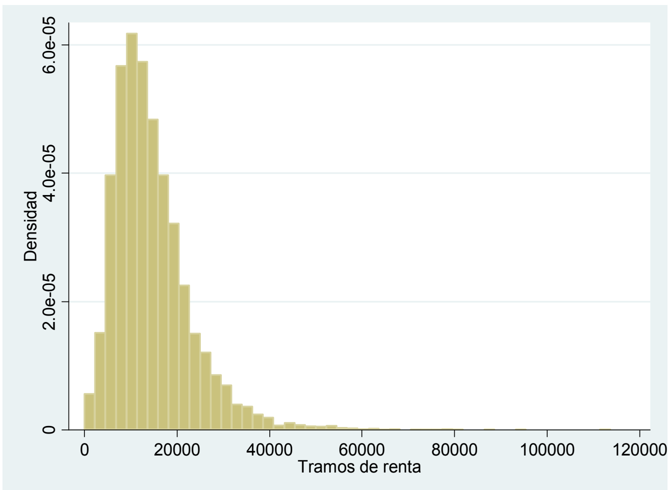
Fuente ECV 2008

Al observar un histograma se puede tener una idea intuitiva tanto del grado de dispersión de la variable, como de su grado de asimetría, características ambas que inciden en el nivel de desigualdad en el reparto de la renta.

También se puede evaluar el nivel de desigualdad de una distribución examinando los porcentajes de renta total que corresponden a los diversos grupos de perceptores de renta. Por ejemplo, en la Figura 1 se observa que 672.000 personas aproximadamente (se considera que la población española asciende a 46 millones de personas) reciben más de 40.000 euros de renta equivalente, es decir, el 1,5% de la población con más renta recibe el 5,1% del total de la renta equivalente en España en 2008.

El principal problema del histograma es que la información gráfica que nos traslada acerca de la distribución, está condicionada por el número de grupos en los que hemos subdividido la escala de rentas y, sobre todo, por la amplitud de los intervalos que definen dichos grupos. Observemos el histograma de la figura 2. Los datos a partir de los cuales se ha construido el histograma son los mismos, sólo que ahora consideramos 50 intervalos.

Figura 2. Distribución de la renta disponible en España, 2007. Histograma con 50 intervalos

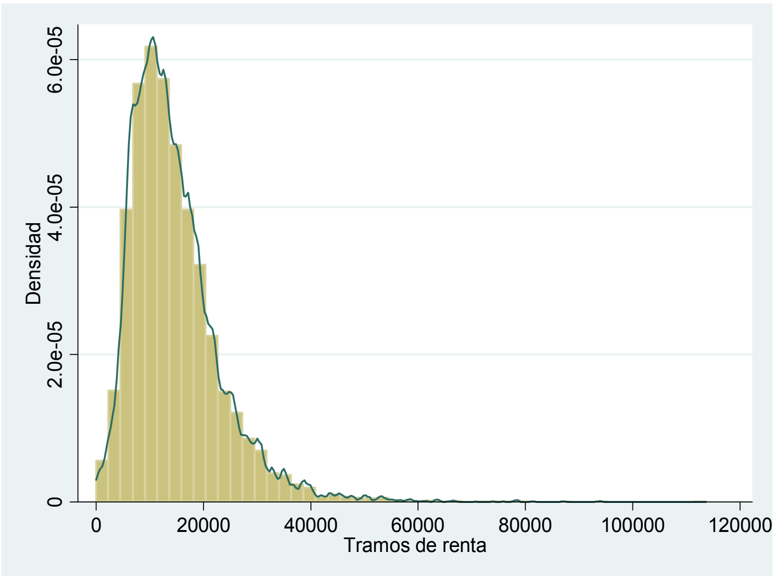


Fuente ECV 2008

Si continuáramos dividiendo la distribución de la renta en un número cada vez mayor de tramos de igual amplitud, la información que nos aportaría el gráfico sería cada vez más detallada. Para ello es preciso suponer que la renta se distribuye de forma continua a lo largo de la escala de rentas.

Actualmente se pueden emplear técnicas más sutiles para comparar distribuciones de renta. Se trata de las funciones de densidad no paramétricas[4]. Estas funciones constituyen un afinamiento de los histogramas, caracterizados por presentar saltos o discontinuidades y ser sensibles a la forma y amplitud con que se definen los intervalos. Estas funciones toman como punto de partida el histograma y no imponen una forma funcional a la distribución permitiendo que los datos "hablen por sí mismos". En la Figura 3 se representa la función de densidad estimada mediante la estimación kernel.

Figura 3. Distribución de la renta disponible en España, 2007. Histograma con 50 intervalos y estimación no paramétrica de la función de densidad



Fuente ECV 2008

Estas dos representaciones, el histograma y la estimación no paramétrica de la función de densidad, nos proporcionan una primera imagen de la distribución, pero existen otras herramientas más adecuadas para analizar específicamente la desigualdad.

Se puede tener una idea aproximada del grado de desigualdad de una distribución de renta examinando los porcentajes de renta total que corresponden a diversos grupos de perceptores de renta. Por ejemplo, para la distribución de los ingresos disponibles en España en 2007, podemos obtener la información contenida en la Tabla 1. En la segunda columna se muestra el porcentaje de renta que perciben los individuos situados en cada uno de los deciles. Así podemos decir, que una vez ordenados los individuos en orden ascendente en función de sus rentas disponibles, el 10% más pobre recibe el 2,91% del total de la renta española, el segundo 10% de la población percibe el 4,77% de la renta y así sucesivamente. Presentando esta información de manera acumulada (últimas dos columnas) el 10% más pobre de la población percibe el 2,91% de la renta total, el 20 % más pobre el 7,68% de la renta y así sucesivamente hasta indicar que el 90% más pobre recibe el 77,29% de la renta, o lo que es igual, el 10% más rico recibe el 22,71% (100-77,29) del total de la renta. Esto pone de manifiesto el desigual reparto de la renta entre los españoles. En una distribución de rentas que fuese igualitaria, es evidente que los porcentajes de participación en la población y en la renta total coincidirían.

Tabla 1.Porcentajes de población, porcentajes en la renta disponible, porcentajes acumulados de población, 100p, y sus correspondientes porcentajes acumulados en la renta disponible total española, 100L(p), para 2007

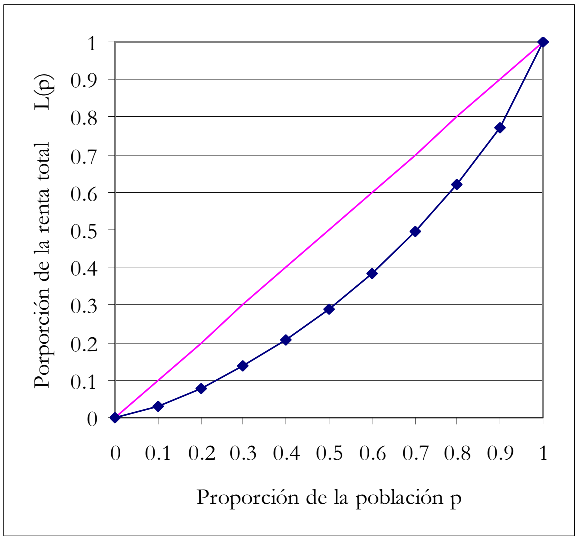
Porcentaje de población	Porcentaje de renta	100p	100L(p)
10	2,91	10	2,91
10	4,77	20	7,68
10	6, 01	30	13,69
10	7,14	40	20,83
10	8,23	50	29,06
10	9,49	60	38,55
10	10,92	70	49,47
10	12,63	80	62,1
10	15,19	90	77,29
10	22,7	100	100

Fuente: ECV 2008

Cuando queremos comparar cómo es el reparto de la renta total en distribuciones diferentes, es necesario utilizar un sistema que permita realizar esa comparación al considerar los niveles de participación en la renta por decilas, percentiles o mediante cualquier cuantila. Una herramienta adecuada para realizar ese tipo de análisis es la curva de Lorenz (1905).

Dicha curva es la representación gráfica de una función, L(·), que puede proporcionar toda la información sobre niveles de participación por cuantilas para una distribución de renta dada. Esta función se construye del siguiente modo. Los individuos se ordenan según su nivel de renta, de menor a mayor, y se representa, para las distintas proporciones acumuladas de la población (p) así ordenada (desde 0 hasta 1 en el eje horizontal), la proporción acumulada de renta total (L(p)) obtenida por dichos individuos (desde 0 hasta 1 en el eje vertical). Por lo tanto, para cada $p \in [0,1]$, L(p) es la proporción de la renta total que percibe el 100p% más pobre de la población. La figura 4 muestra la curva de Lorenz asociada a la distribución de la renta disponible española para 2007. Concretamente, la Figura 4 es la representación gráfica de las dos últimas columnas de la Tabla 1[5].

Figura 4. Curva de Lorenz para los ingresos disponibles en España, 2007



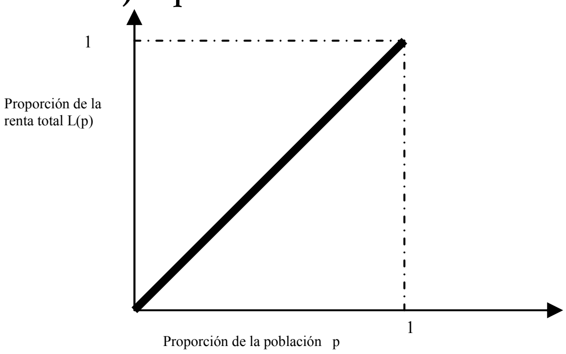
Fuente: ECV 2008

Cuando existe desigualdad, los grupos que corresponden a las cuantilas superiores reciben una proporción de renta mayor que su participación en la población, y las cuantilas más bajas reciben una proporción de renta inferior a su participación en la población. Por lo tanto, la curva de Lorenz siempre se sitúa por debajo de la línea correspondiente a la bisectriz del primer cuadrante; es decir, $L(p)<p$, $0<p<1$. Es evidente que $L(0)=0$, y $L(1)=1$, ya que el 0% de la población recibe el 0% de la renta total, y el 100% de la población recibe el 100% de la renta total.

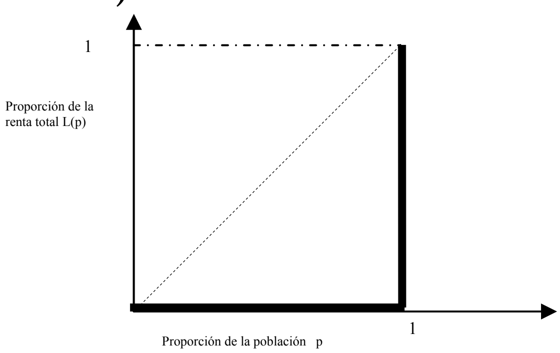
Si todos los individuos disfrutan de un mismo nivel de renta, es decir, si hay equidistribución, las participaciones acumuladas en la renta total y en la población coinciden. Por lo tanto, en este caso es $L(p)=p$, para todo $p \in [0,1]$, de manera que la curva de Lorenz coincide con la diagonal, como se recoge en la figura 5 A. Esa diagonal recibe el nombre de línea de igualdad perfecta o de equidistribución.

Figura 5. Curvas de Lorenz

A) Equidistribución



B) Concentración máxima



El otro caso extremo es el de concentración máxima: un sólo individuo percibe el total de la renta y el resto de la población no recibe nada. En este caso, las sucesivas participaciones acumuladas en la renta total son nulas ($L(p)=0$ para $0 \leq p<1$) hasta acumular toda la renta al considerar la población total, incluido ese único perceptor, L(1)=1. Esta situación se corresponde con la de la figura 5 B. En ella, la curva de Lorenz coincide con el eje horizontal y asciende verticalmente hasta el punto (1, 1).

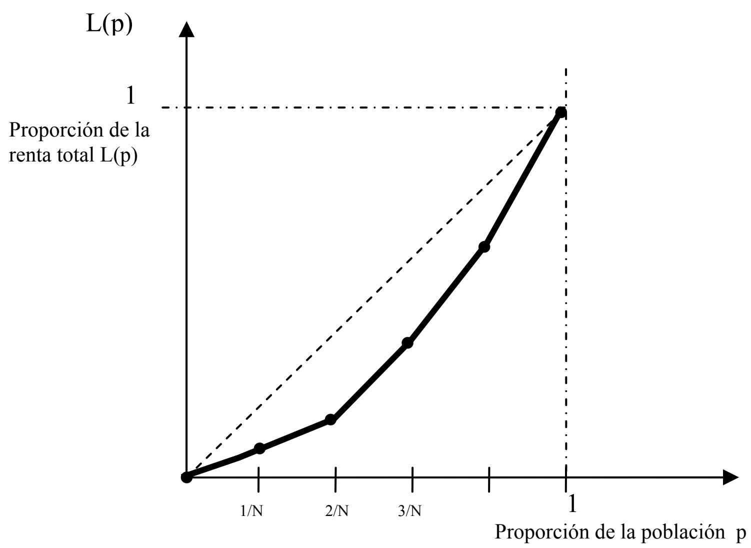
Para definir más formalmente la curva de Lorenz, comenzaremos suponiendo que la renta es una variable discreta. Consideremos una población homogénea de N individuos, $N \geq 2$. Si x_i denota la renta del individuo i-ésimo, bajo el supuesto de que las rentas están ordenadas de menor a mayor y son no negativas, cada distribución de la renta viene representada por un vector $X = (x_1, x_2, ... x_N)$, cuyas componentes cumplen $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_N$. Fijado el tamaño de la población, el conjunto de todas las distribuciones de renta de tamaño N lo representaremos por D^N, mientras que $D = \bigcup_N D^N$ es el conjunto de todas las distribuciones de renta.

Dada la distribución $X = (x_1, x_2, ... x_N) \in D^N$, $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ es su renta media. Queremos estudiar cómo se reparte la renta total, $N\mu = \sum_{i=1}^{N} x_i$, entre el conjunto de unidades económicas. Para hacerlo a través de la curva de Lorenz, se consideran las participaciones acumuladas de población, 1/N, 2/N, …i/N, …, N/N, y sus respectivas participaciones en el volumen total de renta, L(1/N), L(2/N), …L(i/N), …, L(N/N), siendo

$$L(p) = L\left(\frac{i}{N}\right) = \frac{\sum_{1 \leq j \leq i} x_j}{N\mu} \text{ para } 1 \leq i \leq N. \qquad [1]$$

La curva de Lorenz, representación gráfica de la función L(p), viene dada por los puntos (0,0), (i/N, L(i/N)), i=1, 2, 3, …N y la poligonal que une cada dos consecutivos (ver figura 6).

Figura 6. Curva de Lorenz. Caso discreto

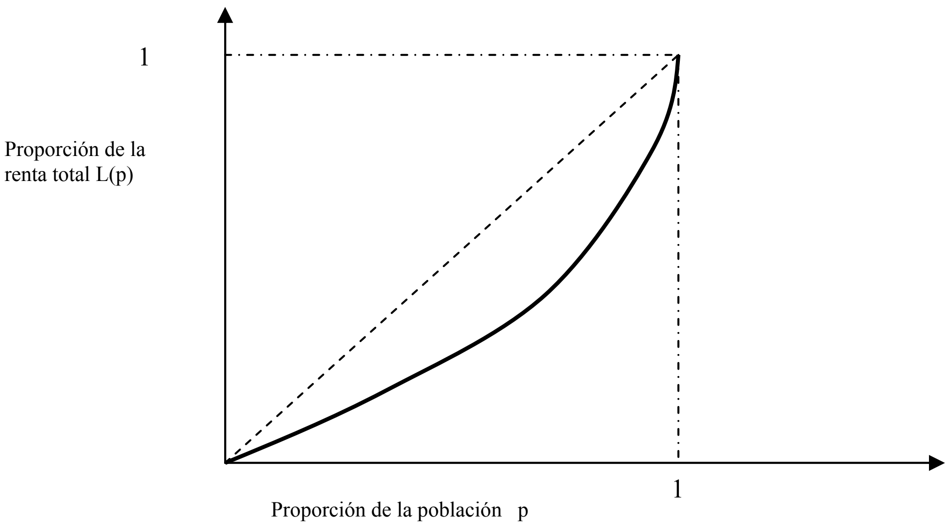


En ocasiones es conveniente utilizar la formulación continua de la curva de Lorenz. Supondremos que la distribución de la renta en una población está representada por la variable aleatoria X, cuyo recorrido es la semirrecta real positiva, $R^+ = [0, \infty)$, siendo $F(\cdot)$ su función de distribución, y $\mu = E(X) = \int_0^\infty x dF(x) < \infty$ su renta media. La función de densidad, $f(\cdot)$, viene dada por la derivada de la función de distribución, $f(x) = F'(x)$, $x \in (0, \infty)$. Como es sabido, F(x) es la proporción de individuos cuya renta es menor o igual que x. La curva de Lorenz asociada a esta distribución se expresa como:

$$L : [0,1] \to [0,1] \text{ , } L(p) = \frac{1}{\mu}\int_0^x s dF(s) = \frac{1}{\mu}\int_0^x s f(s) ds. \qquad [2]$$

Para cada p=F(x), L(p) es la proporción del volumen total de renta que acumula el conjunto de unidades con renta menor o igual que x. Como es natural, las propiedades de la función L(p) coinciden con las indicadas en el caso discreto. Con la formulación continua es posible, por ejemplo, calcular las derivadas de L(p) y obtener resultados de interés, de los que se puede prescindir en una primera aproximación. La gráfica de la curva de Lorenz para una variable continua se muestra en la figura 7 y está contenida, como en el caso discreto, en el cuadrado unidad $[0, 1] \times [0, 1]$.

Figura 7. Curva de Lorenz. Caso continuo



Resumiendo lo anterior, la función L(p) presenta las siguientes propiedades:

- $L(p) \le p$, $p \in [0,1]$
- $L(p) = p$, $p \in [0,1]$ si la distribución es igualitaria
- $L(p) = 0$, $p \in [0,1)$ y $L(1) = 1$ si la distribución presenta máxima concentración.
- L(p) es no decreciente y convexa.
- L(p) es invariante frente a cambios de escala en la renta.
- Fijada la renta media, L(p) caracteriza la distribución[6].

El análisis de la desigualdad se puede hacer desde un punto de vista meramente ordinal o desde un punto de vista cardinal. En el primer caso no podemos realizar comparaciones entre cualquier par de distribuciones, ni cuantificar las diferencias en niveles de desigualdad, pero sí nos permite, en ocasiones, ordenar distribuciones de renta. El enfoque cardinal nos permite comparar cualquier par, o conjunto finito, de distribuciones de renta en términos de desigualdad, ya que recurrimos a medidas escalares. Tiene el inconveniente de que sobre el significado normativo de esas medidas no existe acuerdo unánime. A continuación se abordan estos dos enfoques.

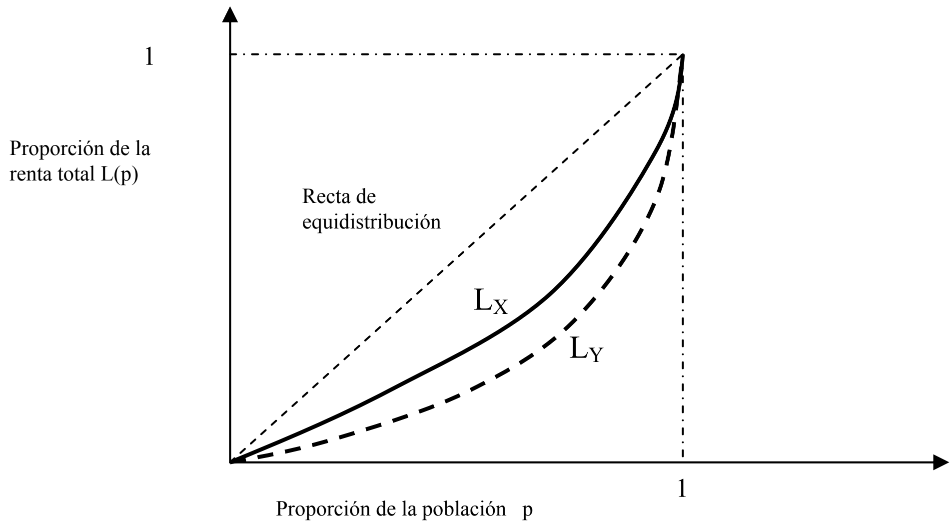
2.1. COMPARACIONES ORDINALES

La curva de Lorenz es muy útil para analizar el reparto de un volumen de renta dado entre los elementos de una población. Sin embargo, quizás su aplicación más importante es que permite comparar distribuciones en términos de desigualdad.

Una forma sencilla de comparar la desigualdad de dos distribuciones de renta, X e Y, consiste en representar sus correspondientes curvas de Lorenz, L_X y L_Y, en el mismo gráfico.

En la figura 8, la curva de Lorenz L_X está situada siempre por encima de L_Y (es decir, L_X está más próxima a la línea de equidistribución que L_Y). En tal caso se puede asegurar que la distribución X es más igualitaria, en términos de la curva de Lorenz, que la distribución Y, o bien, que X domina a Y en el sentido de Lorenz.

Figura 8. Comparación de curvas de Lorenz



En la figura anterior, para cualquier p∈(0, 1), el 100p% de la población con menos renta en X tiene una participación en la renta total mayor que la de ese mismo grupo de población en la distribución Y. Si se considera como situación ideal la de perfecta igualdad (lo que implica incorporar un juicio de valor), se afirmaría que en X el reparto de la renta es más satisfactorio que en Y, al ser más igualitario. Es evidente que la situación descrita en la figura 8 no es la única posible.

La dominancia en el sentido de Lorenz permite adoptar un enfoque ordinal al comparar distribuciones de renta en términos de desigualdad, ya que permite definir una relación en el conjunto de todas las distribuciones de renta, D.

Si X e Y son dos distribuciones de renta, $(X, Y) \in D \times D$, se dice que *X es no más desigual que Y en el sentido de Lorenz*, o bien, *X domina a Y en el sentido de Lorenz* y se expresa $X \geq_L Y$, cuando la curva de Lorenz de X nunca se sitúa por debajo de la de Y. Es decir:

$$X \geq_L Y \iff L_X(p) \geq L_Y(p), \text{ para todo } p \in [0,1].$$

La dominancia estricta, $X >_L Y$, exige, además, que para algún $p \in (0, 1)$ se cumpla $L_X(p) > L_Y(p)$.

La relación $\geq_L$ cumple las siguientes propiedades:

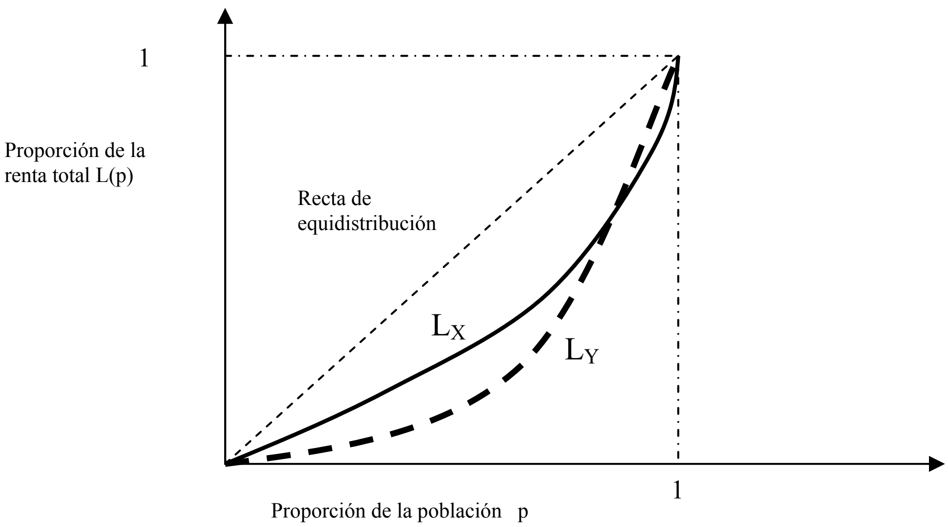
Reflexiva: $X \geq_L X$ para todo $X \in D$

Antisimétrica: $X \geq_L Y \wedge Y \geq_L X \Rightarrow L_X(p) = L_Y(p)$, para todo $p \in [0,1]$. Si se cumpliese, además, $\mu_X = \mu_Y$, entonces X e Y son distribuciones idénticas.

Transitiva: Para todo $X, Y, Z \in D$, $X \geq_L Y \wedge Y \geq_L Z \Rightarrow X \geq_L Z$

En consecuencia, por cumplirse las propiedades anteriores, $(D, \geq_L)$ es un conjunto parcialmente ordenado. La relación binaria $\geq_L$ no es un orden total o completo sobre D al poderse encontrar pares de distribuciones que no son comparables según este criterio. Es decir, existen $X, Y \in D$ tales que no se cumple $X \geq_L Y$, ni tampoco $Y \geq_L X$. Una situación de este tipo, frecuente en las distribuciones de renta reales, es la que presenta la figura 9. En general, no serán comparables según la relación de dominancia $\geq_L$ aquellas distribuciones cuyas curvas de Lorenz se corten en uno o más puntos interiores del intervalo [0, 1].

Figura 9. Comparación de curvas de Lorenz que se cruzan



En la figura anterior, X es más igualitaria que Y hasta un $p_0 \in (0, 1)$ a partir del cual sucede lo contrario. En casos como este no podemos decir qué distribución presenta menor nivel de desigualdad.

EJERCICIO 1: Dadas las siguientes distribuciones de renta, represente sus curvas de Lorenz asociadas y determine el orden de las distribuciones según su grado de desigualdad relativa aplicando el criterio de ordenación de Lorenz siempre que sea posible.

Distribución A={3, 4, 5, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 20}

Distribución B={1, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 15}

Distribución C={5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 17}

EJERCICIO 2: Dadas las siguientes distribuciones de renta, represente sus curvas de Lorenz asociadas y determine el orden de las distribuciones según su grado de desigualdad relativa aplicando el criterio de ordenación de Lorenz siempre que sea posible. Obsérvese que la distribución E se obtiene realizando un cambio de escala en C, concretamente las rentas en E son el doble de las rentas en C. Por otro lado, la distribución F se obtiene realizando un cambio de origen en la distribución C, concretamente las rentas de F resultan al restar 2 unidades a cada una de las rentas de C. Comente cómo afecta esto a la representación de las curvas de Lorenz.

Distribución C={5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 17}

Distribución E={10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 30, 34}

Distribución F={3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 15}

OBSERVACIONES

Es importante advertir que hasta ahora nos hemos referido a la desigualdad en términos de la curva de Lorenz. Existen otras dimensiones tanto de la desigualdad como de la propia renta que no se consideran en esta curva. Por ejemplo, las curvas de Lorenz de las distribuciones C y E del ejercicio 2, coinciden. Una se ha obtenido a partir de la otra mediante un cambio de escala, todas las rentas han variado en la misma proporción. Como consecuencia, C y E tienen diferentes rentas medias. Por otra parte, aunque las diferencias de rentas entre los individuos no han cambiado en términos relativos, sí lo han hecho las diferencias absolutas.

La curva de Lorenz informa sobre cómo se reparte la renta total, pero no indica nada sobre el tamaño de la misma a través de la renta media, por lo que entre dos distribuciones no puede indicarnos cual de ellas es superior en términos de bienestar. La utilización de la curva de Lorenz es adecuada si el interés se centra en las diferencias relativas de renta (de nuevo aparecen los juicios de valor al hablar de desigualdad).

En la literatura se distingue básicamente entre desigualdad relativa y desigualdad absoluta[7]. La primera es invariante frente a los cambios de escala en la variable renta, dado que esta transformación no afecta a las rentas relativas de los individuos. La desigualdad absoluta centra su atención en las diferencias absolutas entre las rentas individuales, por lo que es invariante frente a los cambios de origen de la variable renta[8]. Dicho de otro, si se produce una variación en la renta total de una distribución, para mantener su desigualdad absoluta habría de repartirse a partes iguales entre todos los perceptores, mientras que ese reparto tendría que ser proporcional a las rentas iniciales si no se quiere alterar la desigualdad relativa.

En este trabajo nos hemos referido hasta ahora a la desigualdad relativa, la predominante en la literatura, y así lo haremos en lo sucesivo, salvo que se indique lo contrario.

2.2. COMPARACIONES ESCALARES: MEDIDAS DE DESIGUALDAD

El criterio de dominancia entre curvas de Lorenz induce una ordenación parcial en el conjunto de las distribuciones de renta, D. Sólo permite comparar ciertos pares de distribuciones. Es evidente que cualquier procedimiento que asigne a cada distribución de rentas un número real que resuma la desigualdad existente en dicha distribución, inducirá una ordenación total o completa en el conjunto D. Este tipo de procedimiento es el que proporcionan las medidas o índices de desigualdad.

Formalmente, una *medida de desigualdad,* I, es una función $I: D \rightarrow R$ que asocia a cada distribución de renta un número real. Si $X \in D$, $I(X) \equiv I_X$ es el valor del índice I sobre la distribución X. Indica el nivel de desigualdad que ese índice asigna a dicha distribución.

Toda medida de desigualdad ordena totalmente el conjunto D y permite, por lo tanto, comparar cualquier par de distribuciones, así como cuantificar la diferencia entre sus respectivos niveles de desigualdad.

Sin embargo, las ventajas aparentes de los índices de desigualdad tienen también su contrapartida. En primer lugar, cada una de estas medidas incorpora su propio criterio al agregar la información contenida en una distribución dada[9] (de nuevo los juicios de valor). En consecuencia, diferentes índices pueden dar lugar a distintas ordenaciones de un conjunto de distribuciones. Por supuesto, no existe acuerdo sobre qué índice es el más adecuado. Por ello es habitual, en el trabajo empírico, la utilización de un conjunto de índices a fin de tener en cuenta distintos juicios de valor.

A pesar de lo anterior, existe una amplia clase de medidas, entre las que se encuentran las de uso más habitual, que comparten la propiedad de ser consistentes con el criterio de ordenación inducido por la curva de Lorenz.

Una medida de desigualdad I es *consistente con el criterio de Lorenz* si y sólo si para todo par de distribuciones X e Y tales que $L_X \geq_L L_Y$, se verifica $I_X \leq I_Y$. En sentido estricto se tendría, $L_X >_L L_Y \Rightarrow I_X < I_Y$.

El conjunto de índices que satisfacen la condición anterior, llamados de forma más breve Lorenz consistentes, lo representaremos mediante **L**. Por lo tanto, si entre dos distribuciones existe dominancia en el sentido de Lorenz, cualquier elemento de **L** las ordenará del mimo modo. Ahora bien, si no existe dominancia en el sentido de Lorenz, la ordenación según los índices puede ser diferente, aunque sean Lorenz consistentes.

Foster (1985) caracteriza los elementos de la clase **L** especificando las características o propiedades, necesarias y suficientes, para que una medida de desigualdad sea Lorenz consistente. Esas propiedades son las siguientes:

1. Simetría o anonimidad. La desigualdad no varía si se produce una permutación en la posición de los individuos en la distribución.

2. Independencia de escala. Si todas las rentas cambian en la misma proporción, la desigualdad permanece constante.

3. Principio de población de Dalton. La réplica de una población, que deja invariante la proporción de perceptores de cada una de las rentas originales, no afecta a su desigualdad.

4. Principio de transferencias de Pigou-Dalton. Si se produce una transferencia de renta desde un perceptor hacia otro más pobre, sin que varíe la ordenación relativa entre ambos (transferencia progresiva), la desigualdad debe disminuir.

En la condición 1 subyace el supuesto de que la población es homogénea en el sentido de que los individuos sólo se distinguen por su nivel de renta. La condición 2 permite comparar distribuciones con distinta renta media e indica que los elementos de **L** son índices relativos. Si considerásemos un subconjunto de D formado por las distribuciones con una renta media fija, se puede prescindir de esta condición. La propiedad 3 permite comparar distribuciones sobre poblaciones de distinto tamaño al imponer que lo relevante en la medición de la desigualdad es la proporción de perceptores con un nivel de renta dado. Esta propiedad es irrelevante para la Lorenz consistencia si nos restringimos a D^N. Por lo tanto, la clase **L** puede ser más o menos amplia según el conjunto de distribuciones sobre el que se apliquen las medidas de desigualdad. En la literatura, de los índices que cumplen la propiedad 4 se dice que tienen preferencia por la igualdad o aversión a la desigualdad.

Por supuesto, existen índices que no son Lorenz consistentes, lo que supone que no satisfacen alguna de las propiedades anteriores. Ello no implica que su utilización no sea adecuada en casos específicos. La elección tanto del concepto de desigualdad por el que se opta, como la de los índices seleccionados para valorarla, depende siempre de juicios de valor (es una elección ética).

A continuación se detallan las expresiones de algunas de las medidas de desigualdad más utilizadas en la literatura económica, tanto si la renta se modeliza mediante una variable discreta, $X = (x_1, x_2, ... x_N) \in D^N$, como continua. En el segundo caso supondremos que $F(\cdot)$ es su función de distribución, $f(\cdot)$ la función de densidad y μ la renta media.

Entre las medidas Lorenz consistentes destacamos:

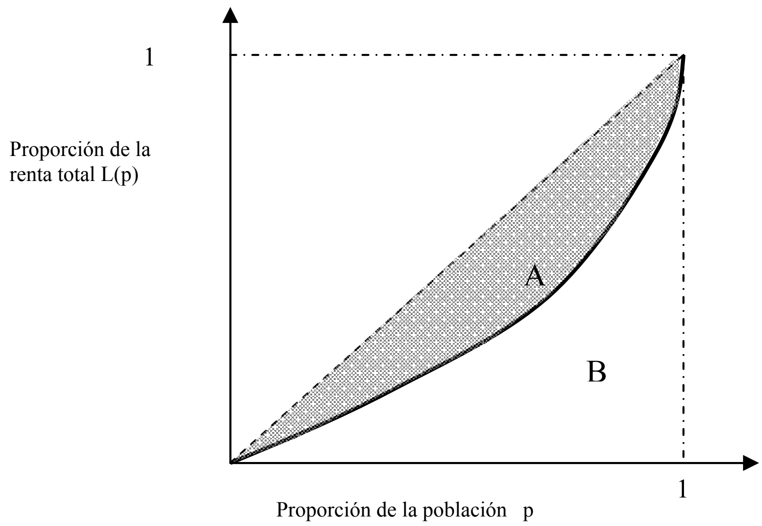
1) El índice de Gini.

Es el índice más conocido y el que tradicionalmente más se ha utilizado en la literatura empírica sobre la desigualdad. Se puede definir como la media aritmética de las diferencias absolutas de todos los pares de rentas, dividida entre el doble de la renta media de la distribución. Es decir, si $X \in D^N$, el índice de Gini, G_X, se expresa como:

$$G_X = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left|x_i - x_j\right|}{2N^2\mu_x} \quad . \qquad [3]$$

Este índice tiene una interpretación sencilla y muy intuitiva a partir de la curva de Lorenz. Su valor permite medir el área entre la curva de Lorenz de una distribución y la línea de igualdad perfecta como proporción del área total situada por debajo de dicha línea. Es un modo de cuantificar la proximidad (o alejamiento) de una distribución respecto de la situación de equidistribución.

Figura 10. Curva de Lorenz y coeficiente de Gini



En la figura 10, se tiene $G_X = A/(A+B)$. Una expresión muy conocida que relaciona este índice con la curva de Lorenz, en el caso continuo, es:

$$G_X = 2\int_0^1 (p - L_X(p))dp = 1 - 2\int_0^1 L_X(p)dp, \qquad [4]$$

de modo que G_X coincide también con el doble del área comprendida entre la curva de Lorenz y la línea de equidistribución. Es evidente que este coeficiente toma sus valores en el intervalo [0, 1], siendo nulo cuando la distribución es perfectamente igualitaria e igual a la unidad si la distribución presenta máxima concentración.

EJERCICIO 3: Dadas las distribuciones de renta del ejercicio 1, calcule el índice de Gini para cada una de ellas y ordene las distribuciones en términos de la desigualdad medida a través del índice de Gini.

2) El coeficiente de variación

Para $X \in D^N$, siendo $\mu_X \neq 0$, se define el coeficiente de variación, CV_X, como el cociente entre la desviación típica, σ_X, y la media μ_X:

$$CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_X)^2}{\sum_{i=1}^{N} x_i}. \qquad [5]$$

En el caso continuo,

$$CV_X = \int_0^{\infty}\left(\frac{x}{\mu} - 1\right)f(x)dx \qquad [6]$$

Es un índice muy utilizado en la literatura. Es muy sensible a las transferencias que se producen en la cola superior de la distribución (rentas "altas").

3) Índices de entropía generalizada.

Si $X \in D^N$, las expresiones de estos índices, dependientes de un parámetro real, son:

$$T_c(X) = \frac{1}{N}\left[\frac{1}{c(c-1)}\right]\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{x_i}{\mu_X}\right)^c - 1\right], \; c\neq 0, 1 \qquad [7]$$

$$T_c(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{x_i}{\mu_X}\right)\ln\left(\frac{x_i}{\mu_X}\right)\right], \; c=1 \qquad [8]$$

$$T_c(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{x_i}{\mu_X}\right), \; c=0 \qquad [9]$$

En términos continuos

$$T_c(X) = \left[\frac{1}{c(c-1)}\right]\int_0^{\infty}\left[\left(\frac{x}{\mu_X}\right)^c - 1\right]f(x)dx, \; c\neq 0, 1 \qquad [10]$$

$$T_c(X) = \int_0^{\infty}\left(\frac{x}{\mu_X}\right)\ln\left(\frac{x}{\mu_X}\right)f(x)dx, \; c=1 \qquad [11]$$

$$T_c(X) = \int_0^{\infty}\ln\left(\frac{x}{\mu_X}\right)f(x)dx, \; c=0 \qquad [12]$$

Estos índices constituyen una familia tanto por su origen común, ya que surgen a partir de conceptos propios de la teoría de la información, como porque poseen propiedades normativas diferenciadas de los anteriores. El parámetro c incorpora diferentes percepciones de la desigualdad. Cuando c decrece, el índice es más sensible a las transferencias en la cola inferior de la distribución (rentas "bajas").

La familia incluye al índice de entropía de Theil (c = 1), la desviación logarítmica media (c =0) y una transformación monótona del coeficiente de variación, ya que si c = 2, se verifica $T_2(X) = \frac{1}{2}(CV_X)^2$, es decir, coincide con la mitad del cuadrado del coeficiente de variación.

A pesar de ser índices "importados" desde otro contexto, son muy utilizados en la literatura al presentar propiedades normativas que se consideran de interés, tales como su comportamiento frente a las transferencias o su descomponibilidad aditiva. Este tipo de propiedades se comentarán más adelante.

EJERCICIO 4: Dadas las distribuciones de renta del ejercicio 1, calcule el índice de entropía generalizada con parámetro c=1 para cada una de ellas y ordene las distribuciones en términos de la desigualdad medida a través del índice de Theil.

4) Familia de índices de Atkinson.

Los índices de esta familia dependen también de un parámetro real, en este caso positivo. Para $X \in D^N$, sus expresiones son:

$$A_\alpha(X) = 1 - \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N}\left(\frac{x_i}{\mu_X}\right)^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \text{ para } \alpha>0,\ \alpha\neq 1 \qquad [13]$$

$$A_\alpha(X) = 1 - \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i}{\mu_X}\right)^{\left(\frac{1}{N}\right)} \text{ para } \alpha=1 \qquad [14]$$

En el caso continuo,

$$A_\alpha(X) = 1 - \left[\int_0^\infty \left(\frac{x}{\mu_X}\right)^{1-\alpha} f(x)dx\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \text{ para } \alpha>0,\ \alpha\neq 1 \qquad [15]$$

$$A_\alpha(X) = 1 - \frac{1}{\mu_X}\exp\{\int_0^\infty \ln x \ f(x)dx\}, \text{ para } \alpha=1. \qquad [16]$$

Esta familia pertenece a la clase de índices éticos o normativos, que miden la desigualdad en términos de la pérdida de bienestar social debida a la dispersión de las rentas. Tratan de cuantificar el coste potencial ocasionado por la desigualdad, por lo que necesitan utilizar alguna función de bienestar social (FBS) concreta que incorpore un conjunto de juicios de valor de forma explícita.

El parámetro α debe ser interpretado como un parámetro de aversión a la desigualdad, ya que a medida que α aumenta se concede más peso a las transferencias en el extremo inferior de la distribución y menos a las transferencias en el extremo superior. En el caso límite en que $\alpha \to \infty$, obtenemos la FBS de Rawls, que sólo tiene en cuenta las transferencias que afectan al individuo más pobre de la población, mientras que α=0 corresponde al caso de indiferencia a la desigualdad, que ordena las distribuciones según su renta media.

A efectos de su utilización en el trabajo empírico es importante destacar que los índices de Theil, T_c, y los índices de Atkinson, A_α, son ordinalmente equivalentes para los valores $c = 1-\alpha$, $\alpha > 0$.

EJERCICIO 5: Dadas las distribuciones de renta del ejercicio 1, calcule el índice de Atkinson con parámetro α=0,5 para cada una de ellas y ordene las distribuciones en términos de la desigualdad medida a través de este índice.

Entre las medidas que no son Lorenz consistentes, pero sí de uso frecuente en la literatura aplicada, citaremos:

1) La desviación relativa respecto de la media

Es la proporción que representa, respecto a la totalidad de la renta, la suma de las diferencias, en valor absoluto, entre las rentas individuales y la media. Si $X \in D^N$,

$$DRM_X = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - \mu_X|}{N\mu_X}. \qquad [17]$$

En términos continuos,

$$DRM_X = \frac{1}{\mu_X}\int_0^\infty |x - \mu_X| f(x)dx \qquad [18]$$

Este índice relativo también tiene una interpretación geométrica sencilla en términos de la curva de Lorenz: es el doble de la distancia máxima vertical entre dicha curva y la recta de equidistribución. No cumple, sin embargo, el principio de transferencias de Pigou-Dalton. Al valor del índice no le afectan las transferencias progresivas que tengan lugar entre dos individuos cuyas rentas sean ambas superiores o inferiores a la renta media.

2) Varianza de los logaritmos

La varianza y la desviación estándar del logaritmo de la variable renta (positiva), son índices relativos de desigualdad. Si $X \in D^N$, el primero de ellos se expresa como:

$$VL_X = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(\ln(x_i) - \ln(g_X)\right)^2}{N}, \qquad [19]$$

siendo g_X la media geométrica de la distribución.

En el caso continuo,

$$VL_X = \int_0^{\infty} \left(\ln(x) - \mu_{\ln(x)}\right)^2 f(x)dx, \qquad [20]$$

donde $\mu_{\ln(x)} = \left(\int_0^{\infty} \ln(x) f(x) dx \right)$ es la media de la variable ln(X).

La raíz cuadrada positiva de VL_X es la desviación estándar de los logaritmos. Estos índices tampoco verifican el principio de transferencias de Pigou-Dalton.

Algunos de los índices relativos anteriores se convierten en índices absolutos al multiplicarlos por la renta media de la distribución. Así, $\mu_X G_X$ es el llamado índice absoluto de Gini, $\mu_X CV_X = \sigma_X$ es la desviación típica de X y $\mu_X DRM_X$ es la desviación absoluta media.

EJERCICIO 6: Dadas las distribuciones de renta del ejercicio 1, las conclusiones extraídas de la representación de sus correspondientes curvas de Lorenz, y los resultados de los ejercicios 3, 4 y 5, comente la frase: "Independientemente de la consistencia en la ordenación de la desigualdad en términos de cualquier número de índices sintéticos… no se pueden hacer juicios comparativos sobre la desigualdad si las curvas de Lorenz se cruzan" Formby y Smith (1986).

Además de los índices presentados en esta sección como Lorenz consistentes, existen otros muchos índices que también lo son. Esta multiplicidad puede causar problemas cuando lo que queremos es cuantificar las diferencias en desigualdad. Si observamos los resultados del ejercicio 6 obtenemos que el índice de Gini y el de entropía (c=1) nos dan los siguientes resultados: $G_A>G_C$, $G_B>G_C$, además $T_A>T_C$, $T_B>T_C$; sin embargo, al comparar las diferencias en desigualdad resulta: $G_A-G_C > G_B-G_C$, mientras que $T_A-T_C < T_B-T_C$. Es decir, aunque el orden establecido, entre pares de distribuciones, por ambos índices es equivalente, hay discrepancia al considerar las diferencias entre niveles de desigualdad.

Ante la imposibilidad de tener garantizada la obtención de resultados robustos al utilizar diferentes medidas de desigualdad, a la hora de seleccionar una de estas medidas se tienen en cuenta un conjunto de propiedades que se consideran deseables, además de las que caracterizan la Lorenz consistencia. El carácter de estas propiedades es variado. Algunas de ellas son de tipo "técnico", mientras que otras incorporan aspectos normativos.

Entre las primeras cabe citar las siguientes:

1. Continuidad. El índice de desigualdad es una función continua. Es decir, "pequeñas" variaciones en la distribución implican cambios también "pequeños" en el valor del índice.

2. Normalización. El recorrido del índice está contenido en el intervalo [0, 1], de manera que su valor sea nulo si la distribución es igualitaria.

Entre las de tipo normativo se encuentran aquellas que exigen que los índices ponderen más las transferencias que tienen lugar en la cola baja de la distribución, o que concedan mayor importancia a la situación de los individuos más pobres. Las dos propiedades siguientes se refieren a principios de transferencias más exigentes que el de Pigou-Dalton.

1. Principio de Transferencias Decrecientes (PTD) (Kolm, 1976a, 1976b). Una transferencia progresiva entre dos individuos, con una diferencia de renta dada, ha de implicar una mayor reducción del índice, cuanto menores sean los niveles de renta de esos individuos[10].

2. Principio Posicional de Transferencias (PPT). Mehran (1976) y Kakwani (1980) introducen una versión posicional del PTD en la que, para una diferencia de rangos dada entre quienes tiene lugar la transferencia, el impacto es mayor en la medida en que ocurra entre individuos situados en la parte inferior de la distribución[11].

Ambos principios incorporan posturas análogas respecto de las transferencias progresivas, pero mientras que para el PTD lo relevante es la diferencia de rentas entre el donante y el receptor, para el PPT lo es la proporción de individuos situados entre ellos.

Por último, existen algunas propiedades cardinales cuyo cumplimiento es conveniente para que los índices proporcionen mejor información sobre la estructura y magnitud de la desigualdad. Entre este tipo de propiedades están:

1. Descomponibilidad aditiva por subpoblaciones. Esta propiedad establece que al descomponer la población en k grupos disjuntos, el índice de desigualdad pueda expresarse como una suma ponderada de las desigualdades dentro de los grupos, más la desigualdad entre los grupos. Es habitual que esta última componente se identifique con la desigualdad entre las medias de los distintos grupos. El interés de esta propiedad se debe a que, salvo en casos triviales, la desigualdad del total es mayor que la suma de las desigualdades existentes en las partes consideradas por separado, ya que la heterogeneidad entre los grupos es, en sí misma, una fuente adicional de diversidad.

2. Descomponibilidad por factores. Esta propiedad permite establecer la contribución de las distintas fuentes de renta a la desigualdad total. Se trata de determinar qué parte de la desigualdad total es atribuible a la desigualdad en cada uno de los tipos de renta, según su naturaleza (rentas del trabajo, rentas del capital, mixtas, prestaciones sociales, etc.) o su perceptor (sustentador principal, cónyuge, hijos, ascendientes, etc.), teniendo en cuenta que cada factor tiene efectos directos e indirectos sobre la desigualdad.

Hay una serie de cuestiones y de matices que no se han tratado en esta sección. Sin ánimo de exhaustividad, podemos citar algunas. Por ejemplo, la desigualdad no es un fenómeno unidimensional, como se ha supuesto a lo largo de esta exposición. Una aproximación a la desigualdad multidimensional es la de Atkinson y Bourguignon (1982)[12]. Muchas medidas estándar de desigualdad no están definidas para rentas negativas y aquellas que lo están necesitan normalmente ser reinterpretadas (Shorrocks (1980), Cowell(1995)). Por otro lado, en el análisis de la desigualdad y en la aplicación del modelo teórico a los datos reales se presentan complicaciones de distinto tipo. Algunas tienen que ver con las fuentes y las limitaciones de los datos para aproximar la variable renta, otras se derivan del carácter muestral de la información disponible y, sobre todo, los individuos, lejos de ser homogéneos, difieren en distintas características y circunstancias que son relevantes en la evaluación de las distribuciones de renta. Lo anterior se complica al estudiar la desigualdad desde un punto de vista longitudinal o temporal. Comentarios sobre estos aspectos se pueden consultar en

 Nº 8, febrero, 2011
Págs. 1 – 39

Gradin y Del Río (2001) y Ruiz-Castillo (2007), donde se reseñan referencias para profundizar en ellos.

3. REDISTRIBUCIÓN DEL IMPUESTO LINEAL[13]

En la práctica, la medición de la desigualdad se realiza con fines diversos y en contextos muy diferentes. Se pueden comparar, en un instante de tiempo, un conjunto de distribuciones de renta para ordenarlas en términos de desigualdad. En otras ocasiones puede interesar la evolución temporal de la desigualdad existente en la distribución personal de la renta disponible en una economía concreta. También es habitual la evaluación de la incidencia de medidas de política fiscal (transferencias, impuestos, etc.) sobre la desigualdad y el bienestar, ya que muchas de esas medidas tienen una finalidad redistributiva[14] en una determinada población o subpoblación.

En esta sección analizamos el efecto redistributivo de un impuesto lineal sobre una distribución de renta dada. Optamos por considerar este impuesto por varias razones. En primer lugar su estructura es muy sencilla, lo que hace fácil su tratamiento analítico. Por otra parte, la tarifa lineal o estructuras tendentes a la linealización (los impuestos reales son lineales por tramos[15]) son alternativas que, de forma recurrente, se vienen planteando desde hace décadas.

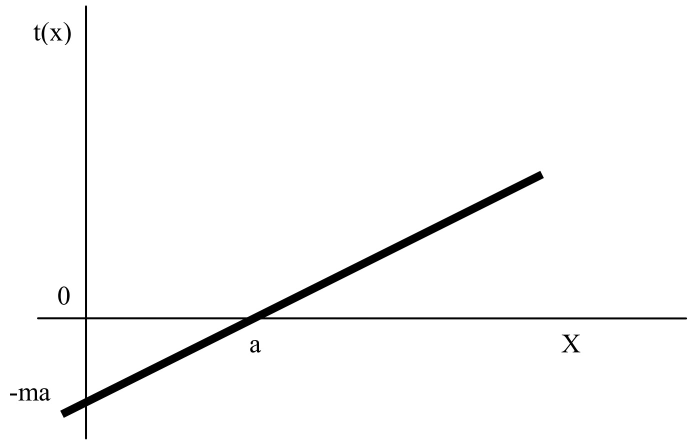
Antes de ocuparnos de la capacidad redistributiva del impuesto lineal, es necesario estudiar algunas de sus características.

3.1. CARACTERÍSTICAS GENERALES DE UNA TARIFA LINEAL

La expresión de un impuesto lineal es:

$$t(x)=m(x-a),\ a>0,\ 0<m<1 \qquad [21]$$

Figura 12. Representación del impuesto lineal puro con tipo de gravamen *m* y mínimo exento *a*



Por lo tanto, la cuota líquida, t(x), es el resultado de aplicar un tipo único, m, a la diferencia entre la renta fiscal, x, de cada contribuyente y una reducción, a. Para las rentas menores que a el impuesto se convierte en una transferencia.

A partir de la definición anterior es inmediato que el tipo marginal es constante a lo largo de la escala de rentas:

$$m = t'(x),\ x > 0. \qquad [22]$$

En el impuesto lineal el tipo medio soportado por el nivel de renta x, a(x), es:

$$a(x) = \frac{t(x)}{x} = m\left(1 - \frac{a}{x}\right),\ x>0. \qquad [23]$$

Es un impuesto estrictamente progresivo, para todo nivel de renta x>0, ya que su tipo medio es una función estrictamente creciente de la renta:

$$\frac{d(a(x))}{dx} = \frac{am}{x^2} > 0\,,$$

aunque su tasa de crecimiento es cada vez menor

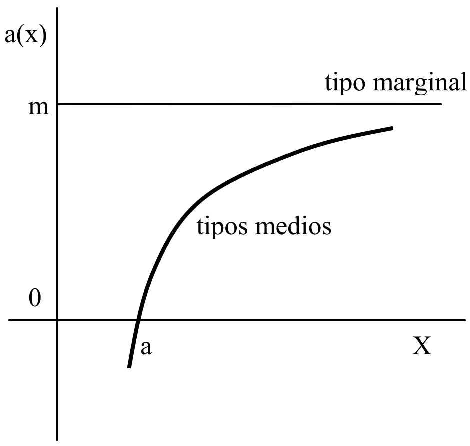
$$\frac{d^2(a(x))}{dx^2} = -\frac{2am}{x^3} < 0$$

y tiende hacia el tipo marginal al crecer el nivel de renta:

$$a(x) \rightarrow m,\ \text{si } x \rightarrow +\infty.$$

En definitiva, el tipo medio, a(x), es una función estrictamente creciente y estrictamente cóncava de la base imponible, con el tipo marginal como asíntota horizontal.

Figura 13. Representación gráfica del tipo medio en un impuesto lineal



Es evidente que la aplicación de un impuesto lineal no modifica la ordenación inicial de los contribuyentes según sus niveles de renta, al ser $t'(x) = m < 1$, x>0. Es decir, la función

$$f(x) = x - t(x) = (1-m)x + ma\text{, } x>0,$$

que asigna a cada renta inicial su renta después de impuestos es estrictamente creciente:

$$f'(x) = 1 - m > 0\text{, } x>0.$$

Una propiedad relevante del impuesto lineal es que su capacidad recaudatoria sólo depende de la renta media de la distribución sobre la que incide. Si F(·) es la función de distribución de la renta antes de impuestos y μ su renta media, el impuesto medio es:

$$\tau = \int_0^\infty t(x)dF(x) = \int_0^\infty m(x-a)dF(x) = m(\mu - a) = t(\mu)\text{,} \qquad [24]$$

y coincide con el impuesto que recae sobre la renta media. En adelante, para que la recaudación sea positiva supondremos $a < \mu$. La renta media de la distribución después de impuestos, μ_{X-T}, es:

$$\mu_{X-T} = \mu - \tau = (1-m)\mu + ma\text{.} \qquad [25]$$

Según lo anterior, la estructura de un impuesto lineal es muy sencilla. Presenta los siguientes rasgos:

1. Existe un único tipo marginal de gravamen.

2. El impuesto es negativo, convirtiéndose en una transferencia, por debajo de un nivel mínimo de renta exento.

3. Implica la eliminación de todo tipo de deducciones y exenciones fiscales que discriminen la renta según su origen.

4. Es progresivo: su tipo medio es una función creciente de la base imponible. Esa función es cóncava y tiende asintóticamente hacia el tipo marginal.

5. Fijados los dos parámetros del impuesto, m y a, el nivel de recaudación queda determinado por la base imponible media, μ.

3. 2. CAPACIDAD REDISTRIBUTIVA DEL IMPUESTO LINEAL

En cualquier impuesto progresivo a lo largo de la escala de rentas, como lo es el impuesto lineal, un aumento de la renta sujeta a gravamen implica un aumento más que proporcional de la cuota[16]. Como consecuencia, estos impuestos trasladan parte de la carga tributaria desde las rentas "bajas" a las "altas", lo que a su vez da lugar a una traslación simultánea, en sentido inverso, de una parte del volumen total de renta después de impuestos. Esto último es el efecto redistributivo o igualador del impuesto[17]. Una forma natural de evaluar este efecto consiste en comparar las curvas de Lorenz de las distribuciones de renta antes y después de la aplicación del impuesto o, lo que es más restrictivo, considerar la variación de un determinado índice de desigualdad en ambas distribuciones. Este estudio se realiza a continuación para la tarifa lineal.

Recordemos que la distribución inicial de la renta está representada por una variable aleatoria no negativa, X, siendo F(·) su función de distribución y μ su media. Si L_X y $L_{X\text{-}T}$ representan, respectivamente, las curvas de Lorenz de las distribuciones antes y después de aplicar la tarifa lineal, se tiene:

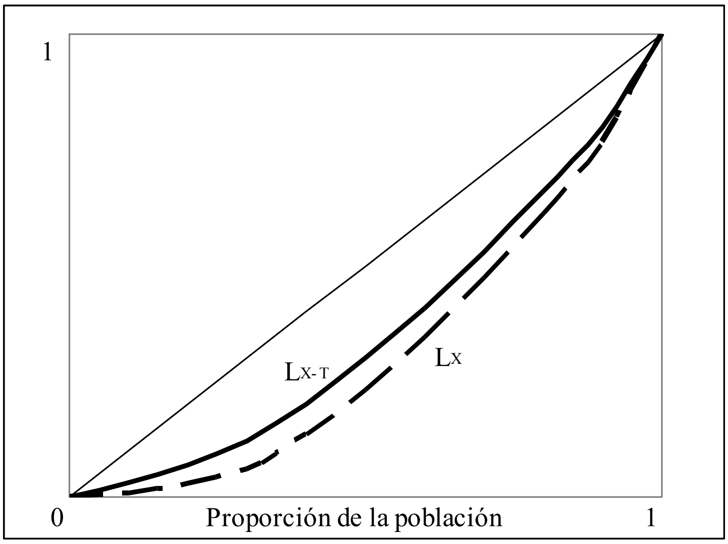
$$L_{X-T}(p) = \frac{1}{\mu_{X-T}} \int_0^x (s - t(s))dF(s) = \frac{(1-m)\mu L_X(p) + map}{(1-m)\mu + ma}, \qquad [26]$$

de donde resulta:

$$L_{X-T}(p) - L_X(p) = \frac{ma}{(1-m)\mu + ma}(p - L_X(p)) > 0,\ 0<p<1,\ p=F(x). \qquad [27]$$

La igualdad anterior indica que para cada $p \in (0,1)$, $L_{X\text{-}T}(p)$ domina estrictamente a $L_X(p)$. Es decir, la distribución de renta después de impuestos es más igualitaria que la distribución inicial. Este resultado es consecuencia de la progresividad del impuesto lineal (Teorema de Jakobson-Fellman, Jakobson, 1976; Fellman ,1976).

Figura 14. Efecto del impuesto sobre la renta bajo el supuesto de que el impuesto reduce la desigualdad



La diferencia $L_{X-T}(p) - L_X(p)$ nos indica para cada $p \in (0,1)$ la capacidad redistributiva del impuesto. Representa la fracción de la renta total después de impuestos que se traslada desde los niveles de renta altos, el 100(1−p)% superior, hacia los bajos, el 100p% inferior. Por ejemplo, si fuese $L_X(0{,}20)=0{,}10$ y $L_{X\text{-}T}(0{,}20)=0{,}14$, significa que al considerar el 20% de la población con menor nivel de renta, ese grupo ha aumentado su participación en la distribución de rentas, como consecuencia del impuesto. Percibía el 10% de la renta antes de impuestos, mientras que su participación en el volumen total de renta después de impuestos es el 14%. A la vez, la participación del 80% de la población con mayor renta se ha reducido

Nº 8, febrero, 2011
Págs. 1 – 39

cuatro puntos porcentuales, desde el 90% al 86%, al pasar de la distribución inicial a la distribución después de impuestos.

Al cumplirse la relación de dominancia $L_{X-T} >_L L_X$, cualquier índice de desigualdad consistente con el criterio de ordenación inducido por la curva de Lorenz, indicará que la distribución de renta disponible es más igualitaria que la distribución de renta antes de impuestos.

Por ejemplo, el índice de Reynolds-Smolensky (1977) clásico, I_{RS}, valora el efecto redistributivo global utilizando el índice de Gini. I_{RS} se define como la diferencia entre los índices de Gini de las distribuciones antes y después de impuestos, lo que coincide con el doble del área comprendida entre las curvas de Lorenz de ambas distribuciones. Es decir:

$$\begin{aligned} I_{RS} &= G_X - G_{X-T} = 2\int_0^1 (L_{X-T}(p) - L_X(p))dp = \\ &= \frac{2ma}{(1-m)\mu + ma}\int_0^1 (p - L_X(p))dp = \frac{ma}{(1-m)\mu + ma} G_X > 0. \end{aligned} \qquad [28]$$

La expresión anterior[18] implica que I_{RS} depende de la desigualdad existente en la distribución de renta disponible, valorada a través de su índice de Gini (G_X), del tipo marginal (m) y del nivel mínimo exento[19] (a). I_{RS} como función de a, es estrictamente creciente y cóncava, y al variar el mínimo exento en el intervalo (0, μ), el índice I_{RS} lo hace en (0, mG_X). Véase figura 15. Por otra parte, fijado a, I_{RS} es también una función creciente y convexa de m cuyo recorrido es el intervalo (0, G_X). Véase figura 16.

Figura 15. Evolución del índice de Reynolds-Smolensky en función del mínimo exento, fijado el tipo de gravamen

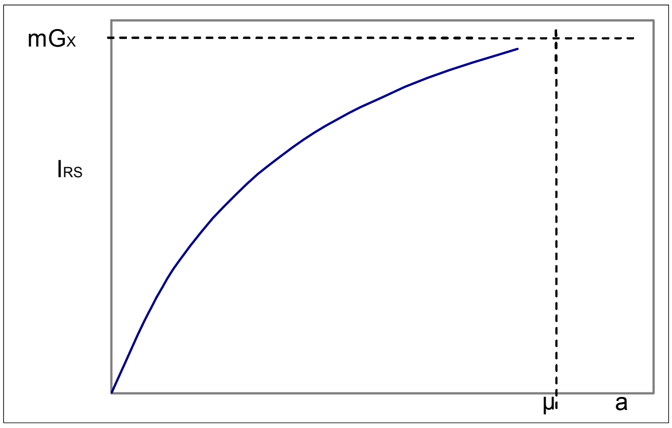
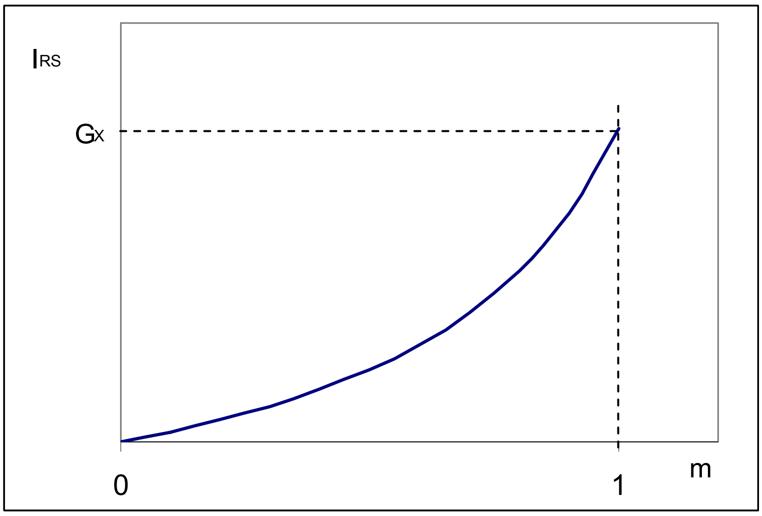


Figura 16. Evolución del índice de Reynolds-Smolensky en función del tipo de gravamen, fijado el mínimo exento, para un impuesto lineal



En definitiva, tanto la elevación del mínimo exento como la del tipo marginal del impuesto implican una mayor capacidad redistributiva.

Las conclusiones son análogas si analizamos la desigualdad existente en la distribución de la renta disponible a través de su índice de Gini. De la expresión [24] resulta:

$$G_{X-T} = \frac{(1-m)\mu}{(1-m)\mu + ma} G_X < G_X . \qquad [29]$$

Fijado el tipo marginal, G_{X-T} es una función decreciente y convexa de a, cuyo valor oscila entre G_X y (1-m)G_X al hacerlo a en el intervalo (0, μ); si se fija la deducción a, G_{X-T} es una función decreciente y convexa del tipo marginal, m, de modo que al variar éste en (0,1), G_{X-T} lo hace en (0, G_x). Por lo tanto, la distribución de renta neta es más igualitaria, en la medida en que aumentan los valores de los parámetros a y m.

Al comparar la dispersión relativa, respecto de la media, en las distribuciones antes y después de impuestos, un cálculo sencillo permite comprobar que si $f(x) = x - t(x)$ es la renta disponible asociada a la renta inicial x>0, se verifica:

$$\frac{|f(x) - \mu_{X-T}|}{\mu_{X-T}} = \frac{(1-m)\mu}{(1-m)\mu + ma} \frac{|x-\mu|}{\mu}, \; x>0.$$

Por lo tanto, en la distribución de renta disponible, la distancia relativa entre la renta de cada contribuyente y la renta media es una reducción, en idéntica proporción para todos, de esa misma distancia calculada en la distribución inicial. En consecuencia, la relación entre los coeficientes de variación de las distribuciones antes y después de impuestos es:

$$CV_{X-T} = \frac{(1-m)\mu}{(1-m)\mu + ma} CV_X < CV_X , \qquad [30]$$

idéntica a la existente entre los respectivos índices de Gini. La aplicación del impuesto lineal reduce en la misma proporción ambas medidas de desigualdad. El análogo al índice I_{RS}, si el efecto redistributivo se evalúa mediante el coeficiente de variación es:

$$CV_X - CV_{X-T} = \frac{ma}{(1-m)\mu + ma} CV_X > 0. \qquad [31]$$

En esta línea, Kiefer (1985) propone otro coeficiente para medir la redistribución global de un impuesto utilizando los índices de la familia de Atkinson, A_α, donde α es un parámetro de aversión a la desigualdad. Su expresión es:

$$I_{KI,\alpha} = A_\alpha(X) - A_\alpha(X-T). \qquad [32]$$

$I_{KI,\alpha}$ es la reducción del índice de Atkinson ocasionada por el impuesto.

Sin que suponga ningún cambio sustancial con lo anterior, algunos autores, han identificado la capacidad redistributiva de un impuesto con el aumento relativo de la igualdad que ocasiona su aplicación. En este sentido, Blackorby y Donaldson (1984) proponen el índice:

$$I_{BD,\alpha} = \frac{(1-A_\alpha(X-T)) - (1-A_\alpha(X))}{1-A_\alpha(X)} = \frac{A_\alpha(X) - A_\alpha(X-T)}{1-A_\alpha(X)}, \qquad [33]$$

que representa la proporción en que aumenta igualdad cuando se mide mediante $1-A_\alpha$.

Por último, conviene observar que con un impuesto lineal, fijado el nivel de recaudación, τ, y su capacidad redistributiva, se pueden determinar de forma única los parámetros del impuesto, a y m. Fijar el efecto redistributivo, si utilizamos el índice de Gini, equivale a conseguir la reducción, en una cuantía fija, de dicho índice al pasar de la distribución inicial a la distribución después de impuestos. Si se pretende que $G_{X-T}=\beta G_X$, $0<\beta<1$, el valor del índice de Reynolds-Smolensky sería $I_{RS}=G_X-G_{X-T}=(1-\beta)G_X$. A partir de las igualdades [24] y [28], la determinación de a y m, dados μ, G_X y β, se reduce a resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\frac{ma}{(1-m)\mu + ma} G_X = I_{RS} = (1-\beta)G_X$$

$$m(\mu - a) = \tau,$$

cuya solución es

$$m = 1 - \beta\left(1 - \frac{\tau}{\mu}\right), \quad a = \mu - \frac{\tau}{m}. \qquad [34]$$

El cálculo anterior prueba que el impuesto lineal puede ser utilizado como un instrumento, de manejo sencillo, para conseguir objetivos de política económica, como puede ser el redistributivo.

EJERCICIO 7: Supongamos que en la distribución C del ejercicio 1 se aplica el impuesto lineal: t(x)=0,3(x-2). a) Calcule el efecto redistributivo de dicho impuesto a través del índice de Reynolds-Smolensky. b) Compruebe que una subida del mínimo exento a 4 supone un aumento en el índice y lo mismo ocurre si aumentamos el tipo marginal de 0,3 a 0,6. c) Obtenga la tarifa lineal que aplicada a la distribución C reduce su índice de desigualdad de Gini en un 20% y proporciona una recaudación de 25 unidades monetarias.

4. SOLUCIÓN Y COMENTARIOS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Los ejercicios planteados se pueden resolver de forma manual, utilizando el programa STATA, o con cualquier otra aplicación informática. El código de programación se presenta al final de esta sección y puede ser utilizado en cualquier versión de STATA con la precaución de estipular el path deseado en la creación del fichero de resultados "epublica_desigualdad.log" y el comando de utilización de los datos que el usuario habrá grabado en un fichero al que llamaremos "desigualdad.dta"

EJERCICIO 1:

Un vez que tenemos los datos de las distribuciones ordenados de menor a mayor debemos generar dos variables adicionales. Una será la proporción que supone cada individuo en la población p_i, y otra la participación de la renta de cada individuo en la renta total q_i. A partir de estas variables crearemos otras nuevas que son las participaciones acumuladas en la población, P_i= 100p, y en la renta, Q_i=100L(p) y obtendremos los siguientes valores.

Para la distribución A

Rentas en A	p_i=participaciones (%) de cada individuo en la población	100p=P_i=participaciones acumuladas (%) de cada individuo en la población	q_i=participaciones (%) de cada renta en la renta total	100L(p)=Q_i=participaciones acumuladas (%) de cada renta en la renta total
3	10	10	3	3
4	10	20	4	7
5	10	30	5	12
8	10	40	8	20
10	10	50	10	30
11	10	60	11	41
12	10	70	12	53
13	10	80	13	66
14	10	90	14	80
20	10	100	20	100

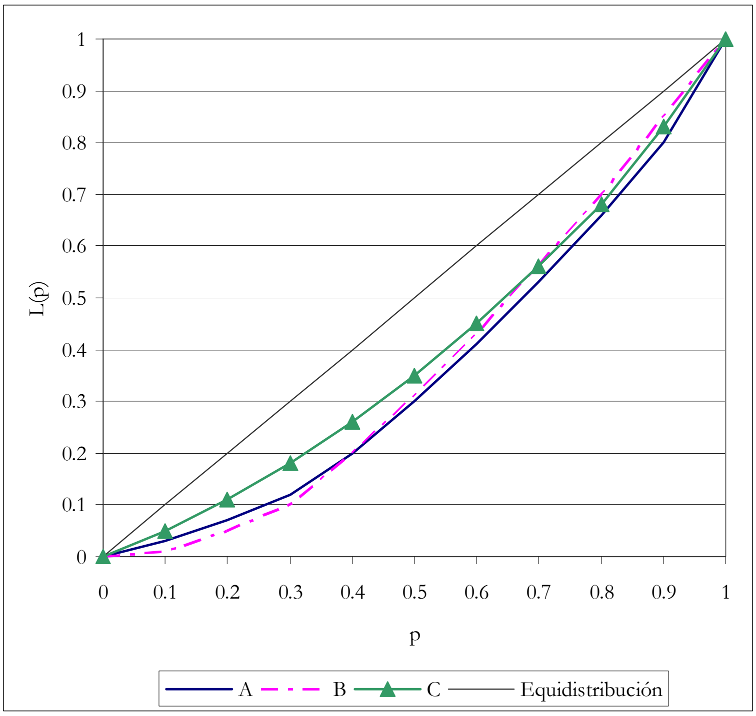
Para la distribución B

Rentas en B	p_i=participaciones (%) de cada individuo en la población	$100p=P_i$=participaciones acumuladas (%) de cada individuo en la población	q_i=participaciones (%) de cada renta en la renta total	$100L(p)=Q_i$=participaciones acumuladas (%) de cada renta en la renta total
1	10	10	1	1
4	10	20	4	5
5	10	30	5	10
10	10	40	10	20
11	10	50	11	31
12	10	60	12	43
13	10	70	13	56
14	10	80	14	70
15	10	90	15	85
15	10	100	15	100

Para la distribución C

Rentas en C	p_i=participaciones (%) de cada individuo en la población	$100p=P_i$=participaciones acumuladas (%) de cada individuo en la población	q_i=participaciones (%) de cada renta en la renta total	$100L(p)=Q_i$=participaciones acumuladas (%) de cada renta en la renta total
5	10	10	5	5
6	10	20	6	11
7	10	30	7	18
8	10	40	8	26
9	10	50	9	35
10	10	60	10	45
11	10	70	11	56
12	10	80	12	68
15	10	90	15	83
17	10	100	17	100

A partir de estos datos construimos las curvas de Lorenz, representando en el eje horizontal las participaciones acumuladas en la población y en el eje vertical las participaciones acumuladas en la renta total. La curva de Lorenz parte del punto (0,0) y termina en (1,1). Observamos como la distribución C domina a la distribución A en el sentido de Lorenz, sin embargo las curvas de Lorenz de C y B se cruzan, y lo mismo ocurre con las curvas de Lorenz de A y B. Por lo tanto, no podemos afirmar nada acerca de la dominancia en el sentido de Lorenz entre estos dos pares de distribuciones.

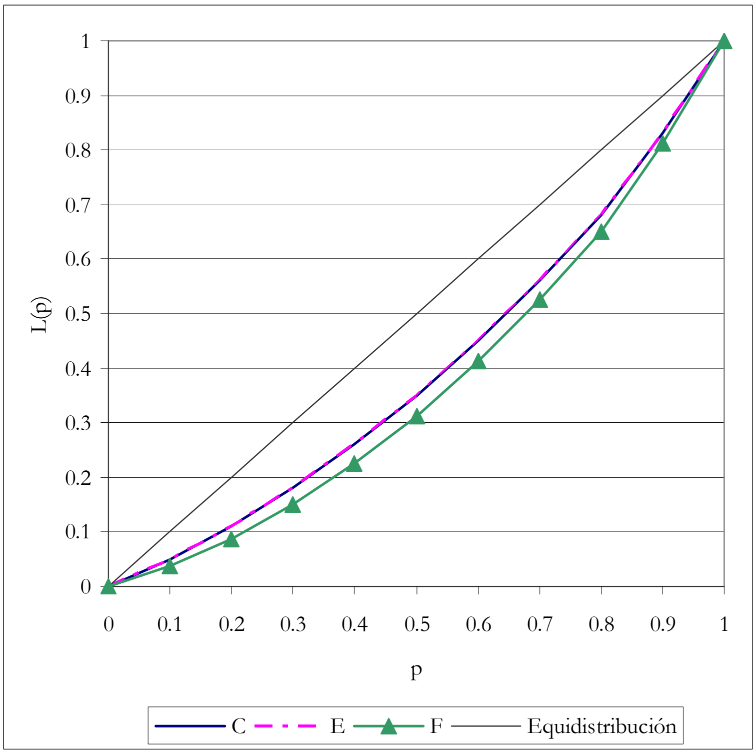


EJERCICIO 2

Un vez que tenemos los datos de las distribuciones ordenados de menor a mayor debemos generar dos variables adicionales. Una será la participación que supone cada individuo en la población, y otra la participación de la renta de cada individuo en la renta total. A partir de estas variables crearemos otras nuevas que son las participaciones acumuladas en la población, p, y en la renta, L(p) y obtendremos los siguientes valores, de igual forma que hicimos en el ejercicio anterior.

Distribución C		Distribución E		Distribución F	
100p	100L(p)	100p	100L(p)	100p	100L(p)
10	5	10	5	10	3.75
20	11	20	11	20	8.75
30	18	30	18	30	15
40	26	40	26	40	22.5
50	35	50	35	50	31.25
60	45	60	45	60	41.25
70	56	70	56	70	52.5
80	68	80	68	80	65
90	83	90	83	90	81.25
100	100	100	100	100	100

A partir de estos datos construimos las curvas de Lorenz, representando en el eje horizontal las participaciones acumuladas en la población y en el eje vertical las participaciones acumuladas en la renta total. Observamos como la curva de Lorenz asociada a la distribución C coincide con la de la distribución E, sin embargo la curva de Lorenz de F es dominada en el sentido de Lorenz por la de las distribuciones C y E.



En este ejercicio se observa que la curva de Lorenz es invariante ante cambios de escala, por ello las curvas de Lorenz de las distribuciones C y E coinciden $L_{ax}(p) = L_x(p)$. Por otro lado la curva de Lorenz sí varía ante cambios de origen. Su comportamiento viene dado por la siguiente expresión:

$$L_{x+a}(p) = \frac{ap + \mu_x L_x(p)}{\mu_x + a} \qquad [35]$$

Tal y como se ha comentado en la nota 4, un incremento en la renta en una cuantía fija para todas las rentas, como ocurre al pasar de la distribución F a la distribución C, (C= F+2), supone un incremento proporcional de la renta similar para todos los individuos, más un extra que redunda en la parte baja de la distribución, por ello se produce una disminución de la desigualdad en el sentido de Lorenz al pasar de la distribución F a la distribución C.

EJERCICIOS 3 a 5

Haciendo uso de las expresiones para datos discretos de las medidas de desigualdad solicitadas calculamos los valores del índice de Gini, índice de entropía generalizada para el parámetro c=1 y el índice de Atkinson para α=0,5.

	A	B	C
Gini	0,276	0,258	0,206
Entropía c= 1	0,12693	0,14088	0,06578
Atkinson (α=0,5)	0,06615	0,08359	0,03286

El índice de entropía se ha obtenido aplicando la expresión [8], y el índice de Atkinson aplicando la expresión [13]. Sin embrago, para obtener los valores del índice de Gini emplearemos la siguiente expresión (para el caso en que las participaciones en la población y en la renta vengan expresadas en porcentajes), de cálculo más sencillo que la [3].

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{k} P_i Q_{i+1} - P_{i+1} Q_i}{10000} \qquad [36]$$

A partir de los datos calculados en el ejercicio 1 creamos las siguientes variables: Pi*Qi+1 y $P_{i+1}*Q_i$.

Distribución A				Distribución B				Distribución C			
Pi=p	Qi=L(p)	PiQi+1	Pi+1Qi	Pi=p	Qi=L(p)	PiQi+1	Pi+1Qi	Pi=p	Qi=L(p)	PiQi+1	Pi+1Qi
10	3	70	60	10	1	50	20	10	5	110	100
20	7	240	210	20	5	200	150	20	11	360	330
30	12	600	480	30	10	600	400	30	18	780	720
40	20	1200	1000	40	20	1240	1000	40	26	1400	1300
50	30	2050	1800	50	31	2150	1860	50	35	2250	2100
60	41	3180	2870	60	43	3360	3010	60	45	3360	3150
70	53	4620	4240	70	56	4900	4480	70	56	4760	4480
80	66	6400	5940	80	70	6800	6300	80	68	6640	6120
90	80	9000	8000	90	85	9000	8500	90	83	9000	8300
100	100			100	100			100	100		
		27360	24600			28300	25720			28660	26600

Para calcular el valor del índice de Gini en cada distribución, aplicamos la expresión [36]. De este modo obtenemos G_A=(27360-24600)/100=0,276; G_B=(28300-25720)/100=0,258, G_C=(28660-26600)/100=0,206

EJERCICIO 6

Al observar las curvas de Lorenz, sólo podemos decir que la distribución C tiene menos desigualdad en el sentido de Lorenz que la distribución A. Pero no podemos afirmar nada acerca de los demás pares de distribuciones. La ordenación inducida por cada una de las medidas de desigualdad de los ejercicios 2 a 4 es completa, además, como los índices son Lorenz consistentes ordenan del mismo modo las distribuciones C y A. Sin embargo, entre las distribuciones C y B, y, A y B, no existe dominancia en el sentido de Lorenz, y la ordenación según los índices puede ser diferente. De hecho, la ordenación inducida por el índice de Gini es distinta a la inducida por el índice de Atkinson. Y la ordenación inducida por el índice de entropía coincide con la del índice de Atkinson. No podemos decantarnos por la ordenación de uno u otro índice ya que cada uno de ellos incorpora juicios de valor diferentes.

EJERCICIO 7

La aplicación del impuesto lineal supone trabajar con una nueva distribución a la que llamaremos C-T. Como consideramos tres impuestos lineales distintos en los apartados a y b, obtenemos las siguientes distribuciones

Nº 8, febrero, 2011
Págs. 1 – 39

	Distribución C-Ti		
Distribución C	x-t1=x-0.3*(x-2)	x-t2=x-0.3*(x-4)	x-t3=x-0.6*(x-2)
5	4,1	4,7	3,2
6	4,8	5,4	3,6
7	5,5	6,1	4
8	6,2	6,8	4,4
9	6,9	7,5	4,8
10	7,6	8,2	5,2
11	8,3	8,9	5,6
12	9	9,6	6
15	11,1	11,7	7,2
17	12,5	13,1	8

El índice de Gini asociado a cada una de estas nuevas distribuciones, y el índice de Reynolds-Smolensky, vienen recogidos en la siguiente tabla:

		Distribución C-Ti		
	Distribución C	x-t1=x-0.3*(x-2)	x-t2=x-0.3*(x-4)	x-t3=x-0.4*(x-2)
Gini	0,206	0,190	0,176	0,158
I_{RS}		0.016	0.030	0.048

Observamos que el índice de Reynolds-Smolensky que mide la redistribución es mayor a medida que aumenta el mínimo exento manteniendo fijo el tipo marginal (compárese I_{RS} (x-t1) con I_{RS} (x-t2)). Por otro lado, si mantenemos el mínimo exento y aumentamos el tipo marginal el índice también aumenta (compárese I_{RS} (x-t1) con I_{RS} (x-t3)).

Por último, para calcular la tarifa lineal del impuesto aplicamos la expresión [34], donde β=0,8, y τ=2,5=25/10, resultando: t(x)=0,4 (x-3,75), es decir, m=0,4 y a =3,75.

4.1 Código de programación con STATA

El código de programación de cada uno de los ejercicios se presenta en este apartado para que el lector pueda replicar su cálculo o realizar cálculos nuevos.

Para resolver los ejercicios haciendo uso del programa STATA, lo primero que haremos es teclear los datos correspondientes a las distribuciones A, B y C del ejercicio 1 a través del editor del programa fichero, o bien, si los tenemos introducidos en una hoja de cálculo Excel, podemos transferirlos a formato STATA. Las variables renta correspondiente a cada distribución las llamaremos xA, xB y xC. Grabaremos los datos en un fichero al que llamaremos "desigualdad.dta"

```
*Fichero de solución a los ejercicios propuestos en epublica_desigualdad

*EJERCICIO 1
*------------
*Para dibujar las curvas de Lorenz teclearemos las siguientes
instrucciones en STATA:
```

```
*Abriremos el fichero desigualdad.dta
capture clear
capture log close
log using "C:\.........\...\epublica_desigualdad.log", replace
use "C:\..........\...\desigualdad.dta", clear

*Necesitamos obtener las coordenadas de la curva de Lorenz. Como primer
paso obtenemos la contribución (ordenada en orden ascendente) de cada
observación en la población y en la renta total, como una proporción del
total. Esta operación la repetimos para cada distribución, A, B y C.

*Estimamos las participaciones acumuladas de población y de renta en la
distribución A.
sort xA
gen IA=1
gen cum_IA=sum(IA)
gen cum_IA_p= cum_IA/cum_IA[_N]
gen cum_xA=sum(xA)
gen cum_xA_p= cum_xA/cum_xA[_N]

* Repetimos para B y para C
sort xB
gen IB=1
gen cum_IB=sum(IB)
gen cum_IB_p= cum_IB/cum_IB[_N]
gen cum_xB=sum(xB)
gen cum_xB_p= cum_xB/cum_xB[_N]

sort xC
gen IC=1
gen cum_IC=sum(IC)
gen cum_IC_p= cum_IC/cum_IC[_N]
gen cum_xC=sum(xC)
gen cum_xC_p= cum_xC/cum_xC[_N]


*Otra forma de calcular las coordenadas es a través del comando glcurve
glcurve xA, pvar(cum_IA_p) glvar(cum_xA_p) replace lorenz nograph
glcurve xB, pvar(cum_IB_p) glvar(cum_xB_p) replace lorenz nograph
glcurve xC, pvar(cum_IC_p) glvar(cum_xC_p) replace lorenz nograph



*Dibujamos las curvas de lorenz. Aunque no lo dibuja, estas curvas deben
partir desde el punto (0,0)
graph twoway (connected cum_IA_p  cum_IA_p )(connected cum_xA_p cum_IA_p)
(connected cum_xB_p cum_IB_p) (connected cum_xC_p cum_IC_p)



*EJERCICIO 2
*------------
*Generamos las nuevas distribuciones a partir de a distribución C
gen xE=xC*2
gen xF=xC-2


*Estimamos las participaciones acumuladas de población y de renta en la
distribución c, E y F.

sort xE
```

```
gen IE=1
gen cum_IE=sum(IE)
gen cum_IE_p= cum_IE/cum_IE[_N]
gen cum_xE=sum(xE)
gen cum_xE_p= cum_xC/cum_xE[_N]

sort xF
gen IF=1
gen cum_IF=sum(IF)
gen cum_IF_p= cum_IF/cum_IF[_N]
gen cum_xF=sum(xF)
gen cum_xF_p= cum_xF/cum_xF[_N]



*Otra forma de calcular las coordenadas es a través del comando glcurve
glcurve xA, pvar(cum_IE_p) glvar(cum_xE_p) replace lorenz nograph
glcurve xB, pvar(cum_IF_p) glvar(cum_xF_p) replace lorenz nograph


*Dibujamos las curvas de lorenz. Aunque no lo dibuja, estas curvas deben
partir desde el punto (0,0)
graph twoway (connected cum_IC_p  cum_IC_p ) (connected cum_xC_p
cum_IC_p) (connected cum_xE_p cum_IE_p) (connected cum_xF_p cum_IF_p)


*EJERCICIOS 3 a 5
*----------------
*Para calcular las medidas de desigualdad simplemente empleamos el
comando ineqdeco

ineqdeco xA
ineqdeco xB
ineqdeco xC



*EJERCICIO 7
*------------
*Debemos generar las nuevas distribuciones de renta después de impuestos
gen xC_T1=xC-0.3*(xC-2)
gen xC_T2=xC-0.3*(xC-4)
gen xC_T3=xC-0.6*(xC-2)

*Calculamos el índice de Reynolds-Smolensky. Para ello calculamos los
índices de Gini asociados a cada distribución y los sustraemos.
ineqdeco xC
local GxC=r(gini)
ineqdeco xC_T1
local GxC_T1=r(gini)
local IRS_T1=`GxC'-`GxC_T1'
display "IRS_T1=`GxC'-`GxC_T1'=`IRS_T1'"

ineqdeco xC_T2
local GxC_T2=r(gini)
local IRS_T2=`GxC'-`GxC_T2'
display "IRS_T2=`GxC'-`GxC_T2'=`IRS_T2'"

ineqdeco xC_T3
local GxC_T3=r(gini)
local IRS_T3=`GxC'-`GxC_T3'
```

```
display "IRS_T3=`GxC'-`GxC_T3'=`IRS_T3'"

*El apartado c lo haríamos manualmente
```

Notas

[1]Aún se siguen planteando problemas conceptuales en la medición de la desigualdad (Zubiri, 1985 y Ruíz-Castillo, 1986). Véase Lambert (2001) y Cowell (2000) para una revisión de los enfoques en la medición.
2 Nos referimos a un impuesto lineal con mínimo exento, como se define en el epígrafe 3.1.
3 La renta equivalente permite ajustar la renta de manera que tiene en cuenta el tamaño del hogar, la presencia de economías de escala y las necesidades relativas de los miembros del hogar. Po lo tanto, la renta equivalente permite establecer comparaciones entre hogares con distintas composiciones.
4 La estimación no paramétrica de la función de densidad se ha realizado partiendo de una ordenación de todas las rentas observadas de menor a mayor, y calculando la densidad de las observaciones para un cierto nivel de renta. Para ello, se superpone una ventana en los datos, y se agrega la información dentro de esa ventana. La ventana se desliza para estimar la densidad en un nuevo punto. La forma más sencilla de agregar la información dentro de la ventana es simplemente contar la cantidad de observaciones que caen dentro de ella. Una forma más exacta de agregar la información es dar pesos diferentes a cada una de esas observaciones, estableciendo ponderaciones decrecientes a medida que nos alejamos del punto central de la ventana. Este es el método de estimación kernel. La palabra kernel se refiere a la regla utilizada para asignar ponderaciones dentro de la ventana.
5 La curva de Lorenz se puede construir a partir de los datos contenidos en la Tabla 1 (por tramos), o a partir de los microdatos, agregando la renta de cada persona y calculando los porcentajes acumulados para cada persona. Ésta última forma de proceder nos llevaría a una curva de Lorenz con un trazado más suave, ya que contaríamos con más información que en el caso de trabajar con la información agregada por deciles.
6 Esta propiedad es importante. Su demostración excede el alcance de este trabajo al ser necesario considerar las dos primeras derivadas de L(p).
7 Existen propuestas teóricas que se sitúan en posiciones intermedias entre el concepto absoluto y relativo de desigualdad. Estas propuestas de nociones intermedias de desigualdad no se revisarán en este artículo, pero pueden consultarse en Kolm (1976 a y b), Maasoumi, E. (1986), Bosert y Pfingstein (1990), Pfingstein y Seidl (1997) y Del Río y Ruiz-Castillo (2000).
8 En términos ordinales, los conceptos absoluto y relativo de desigualdad coinciden cuando se consideran distribuciones con igual media. Por otro lado, es evidente que incrementos de renta que dejen invariante o disminuyan la desigualdad absoluta, implican una disminución de la desigualdad relativa: las rentas bajas habrán crecido en mayor proporción que las altas.
9 Al agregar la información a lo largo de la escala de rentas, los índices difieren en la "importancia" o ponderación que asignan a cada tramo de la distribución.
10 De los índices citados cumplen este principio el índice de Theil con parámetro igual a 1, 0, y -1, y el índice de Atkinson con parámetro alfa igual a cero.
11 De los índices citados cumplen este principio el índice de Theil con parámetro igual a0, y -1, y el índice de Atkinson con parámetro alfa igual a cero.
12 Otras referencias interesantes son: Atkinson (2003), Dardanoni (1996), Gajdos y Weymark. (2005), Savaglio (2002), Tsui (1995, 1999), Weymark (2004).
13 Esta sección se basa en Imedio (1996, 2003).
14 En este ámbito el término redistribución no tiene su significado habitual. No se refiere a distribuir de forma diferente un volumen de renta dado, sino de valorar si una determinada medida fiscal proporciona un reparto más igualitario de la renta. Por lo tanto, en lo sucesivo, se identifica efecto redistributivo con efecto igualador.
15 Un estudio detallado de estas tarifas es el de Imedio y Bárcena (2002).
16 Al ser creciente el tipo medio, para todo nivel de renta, se tiene que y>x>0, implica (t(y)/y)>(t(x)/x), de modo que (t(y)/t(x))>y/x.
17 Está estrechamente relacionado con su progresividad global, entendida como desviación de la proporcionalidad. Se basa en la comparación del impuesto vigente con el proporcional de recaudación equivalente. Este aspecto no lo abordamos en esta exposición.
18 El factor $\mathrm{ma}/((1-\mathrm{m})\mu+\mathrm{ma})$ que aparece en ella es la unidad menos la progresión residual del impuesto en la renta media. Un tratamiento detallado de esta cuestión queda fuera del objetivo de este trabajo.
19 Es interesante observar que la disminución porcentual del índice de Gini al aplicar un impuesto lineal, dada por $100(G_X - G_{X-T})/G_X = 100\mathrm{ma}/((1-\mathrm{m})\mu+\mathrm{ma})$, no depende de la desigualdad inicial existente en la distribución sobre la que incide; sólo depende de los dos parámetros del impuesto.

Agradecimientos

La autora desea agradecer los amplios y detallados comentarios realizados por Luis J. Imedio Olmedo sobre el borrador de este trabajo.

REFERENCIAS

Amiel, Y. y Cowell, F.A. (1992). "Measurement of income inequality: experimental test by questionnaire", *Journal of Public Economics*, 47: 3-26.

Amiel, Y. y Cowell, F.A. (1999). *Thinking about inequality,* Cambridge: University press.

Atkinson, A. B. (1970). "On the Measurement of Inequality", *Journal of Economic Theory*, 2: 224-263.

Atkinson, A. B. (1975). *The economics of inequality*, Londres: Oxford University Press. [Traducción castellana: *La economía de la desigualdad*, Barcelona: Editorial Crítica, 1981].

Atkinson, A. B. (2003). "Multidimensional deprivation: contrasting social welfare and counting approaches", *Journal of Economic Inequality*, vol. 1: 51-65.

Atkinson, A. B. y Bourguignon, F. (1982). "The comparison of multi-dimensioned distributions of economics status", *Review of Economic Studies*, 49: 183-201

Ballano, C. y Ruiz-Castillo, J. (1993). "Searching by questionnaire for the meaning of income inequality", *Revista Española de Economía*, X: 233-259.

Blackorby, C. y Donaldson, D. (1984). "Ethical social index numbers and the measurement of effective tax/benefit progressivity", *Canadian Journal of Economics*, 17: 683-694

Bossert, W. y Pfingsten, A. (1990). "Intermediate inequality: concepts, indices, and Welfare implications", *Mathematical Social Sciences*, 19: pp. 117-134.

Chakravarty, S. y Muliere, P (2004). "Welfare indicators: a review and new perspectives. 2. Measurement of poverty," *Metron - International Journal of Statistics*, Dipartimento di Statistica, Probabilità e Statistiche Applicate - University of Rome, vol. LXII(2): 247-281.

Cowell, F. (1995). *Measuring Inequality*, 2nd Edition, Handbooks in Economics, Prentice Hall, London: LSE. (1st. Edition 1977, London: Phillip Alan Publiserhs Limited).

Cowell, F. A. (2000). "Measurement of inequality", en Atkinson, A. B. y Bourguignon, F. (eds.), *Handbook of Income Distribution*, vol. 1, Handbooks in Economics 16: 87-166, Elsevier: North-Holland.

Dagum, C. (1993). "Fundamentos de bienestar social de las medidas de desigualdad en la distribución de la renta", *Cuadernos de Ciencias Económicas y Empresariales*, 24: 11-36

Dardanoni, V. (1996). "On Multidimensional Inequality Measurement" in *Research on Economic Inequality: Income Distribution, Social Welfare, Inequality and Poverty* (Vol. 6), eds. C. Dagum and A. Lemmi, JAI Press Inc.: 201-205.

Del Río, C. y Ruiz-Castillo, J. (2000). "Intermediate inequality and welfare", *Social Choice and Welfare*, 17 (2): 223-239.

Fellman, J. (1976). "The Effect Transformations on Lorenz Curves", *Econometrica*, 44: 823-824.

Formby, J.P. y Smith, W.J. (1986,) "Income inequality across nations and over time: comment", *Southern Economic Journal*, 53, 562-563

Foster, J. E. (1985) "Inequality measurement", Publicado en Fair Allocation (H.P. Young, ed.), *Proceedings of symposia in Applied Mathematics*, vol. 33, Providence, American Mathematical Society: 31-68.

Gajdos, T., y Weymark, J. A. (2005). "Multidimensional Generalized Gini Indices", *Economic Theory*, 26 (3): 471-496.

Gradín C. y del Río C. (2001). *La medición de la desigualdad*, recurso en internet en la dirección: http://decon.edu.uy/~mito/nip/desigualdad.pdf

Imedio Olmedo, L. J. (1996). "Un estudio analítico del impuesto lineal sobre la renta", *Hacienda pública española*, 136, pp. 57-70

Imedio Olmedo, L. J. (2003). "El impuesto lineal: progresividad y efecto redistributivo", *Cuadernos aragoneses de economía*, 13/1: 11-30

Imedio Olmedo, L. J. y Bárcena Martín, E. (2002). "Un estudio analítico del impuesto lineal por tramos. Aplicación a la tarifa nominal del IRPF 2000" *IX Encuentro de economía pública, hacienda y medio ambiente*. 7 y 8 de febrero de 2002.

Jakobsson, U. (1976). "On the Measurement of the Degree of Progression", *Journal of Public Economics*, 5: 161-168.

Kakwani, N.C. (1977). "Measurement of Tax Progressivity: An International Comparison", *Economic Journal*, 87: 71-80.

Kakwani, N.C. (1980). "On a Class of Poverty Measures", *Econometrica*, 48: 437-446.

Kiefer, D.W. (1985). "Distributional tax progressivity indexes", *National Tax Journal*, 37: 497-513.

Kolm, S.-Ch. (1968). "The Optimal Production of Social Justice" en J. Margolis y H. Guitton, eds., *Public Economics*, MacMillan.

Kolm, S.-Ch. (1976a). "Unequal Inequalities I", *Journal of Economic Theory*, 12: 416-442.

Kolm, S.-Ch. (1976b). "Unequal Inequalities II", *Journal of Economic Theory*, 13: 82-111.

Kuznets, S. (1953). *Share of upper income groups in income and savings*, Nueva York:, National Bureau of Economic Research.

Lambert, P. J. (2001). *The distribution and redistribution of income*, Manchester University Press. 3ª edición.

Lorenz, M. O. (1905). "Methods of measuring the concentration of wealth", *American Statistical Association*, 9: 209-219.

Maasoumi, E. (1986). "The measurement and decomposition of multidimensional inequality", Econometrica 54, 991-997.

Mehran, F. (1976). "Linear measures of income inequality", *Econometrica*, 44: 805-809.

Pfingsten, A. y Seidl, C. (1997). "Ray invariant inequality measures", en Zandvakili, S. y Slotje, D. (eds.). *Research on taxation and inequality*: 107-129, JAI Press.

Reynolds, M. y Smolensky, E. (1977). *Public Expenditure, Taxes, and the Distribution of Income: The United States, 1959, 1961, 1970,* New York: Academic Press.

Ruiz-Castillo, J. (1986). "Problemas conceptuales en la medición de la desigualdad", *Hacienda Pública Española*, 101: 17-31.

Ruiz-Castillo, J. (2007). *La medición de la desigualdad de la renta: una revisión de la literatura,* Documentos de Trabajo 07-02, Serie de Economía 01, Universidad Carlos III .

Savaglio, E., (2002). "Multidimensional inequality: A survey". In: Farina, F., Savaglio, E. (Eds.), *Inequality and Economic Integration*, London: Routledge.

Sen, A. (1973). *On Economic Inequality*, Londres: Oxford University Press.

Sen, A. (1992). *Inequality Rexamined*, Oxford: Harvard University Press, Cambridge, MA, Clarendon Press

Shorrocks, A. F. (1980) "The class of additively descomposable inequality measures", *Econometrica*, 48: 613-625.

Tsui, K.-Y., (1995). "Multidimensional generalizations of the relative and absolute inequality indices: The Atkinson—Kolm—Sen approach", *Journal of Economic Theory*, 67, 251-265.

Tsui, K.-Y., (1999). "Multidimensional inequality and multidimensional generalised entropy measures: an axiomatic approach", *Social Choice and Welfare*, 16: 145-158.

Weymark, J. (2004). "The normative approach to the measurement of multidimensional inequality", Working Paper No. 03-W14R, Vanderbilt University. In: Farina, F., Savaglio, E. (Eds.), *Inequality and Economic Integration*, London: Routledge.

Zubiri, I. (1985): "Una Introducción al Problema de la Medición de la Desigualdad", *Hacienda Pública Española*, 95: 291-317.

Abstract

Nowadays more attention is paid to income inequality, maybe due to the recognition of politicians, researchers and academics, of the links between inequality and other social economic phenomena. This article presents, in a simple way, the concept of inequality and how to evaluate it. For this purpose we introduce the Lorenz curve, the relationship of dominance between these curves and the partial ordering that this relationship leads in the overall distribution of income. Reference to inequality indices that are commonly used in the applied literature is also made. In the second part of the work, as an example of the redistributive effect of fiscal policy measure, the impact of a linear tax on inequality is studied. The main results are illustrated through the proposition of exercises which can be solved either manually or by using the statistical software STATA.

Key words: inequality measurement, Lorenz curve, linear tax, teaching of Economics.

JEL Codes: D30, D63, A2.